

Événements visuels de polyèdres

Guillaume BATOG
Stage de M2 encadré par Xavier GOAOC
Equipe VEGAS, Loria (Nancy)

25 août 2008

Le contexte général

Les années 70 ont marqué le début d'importants travaux en visibilité afin de répondre à de nouveaux problèmes nés du développement de l'informatique : représentation de scènes 3D, reconnaissance de formes à partir d'images... Ces problèmes nécessitent souvent d'analyser les zones depuis lesquelles la vue des objets change par un léger déplacement du point de vue : les *surfaces d'événements visuels*.

Historiquement, la théorie des singularités a permis l'étude des surfaces lisses suivant une approche différentielle. Toutefois les résultats obtenus ne s'appliquent pas à la classe des polyèdres, vus comme des surfaces lisses par morceaux. Les principaux travaux existants dans le cas polyédrique sont dus à Gigus et Malik [2]. Ils fournissent une classification exhaustive mais grossière des instabilités car leur approche est combinatoire : l'équivalence de vues se réduit à l'isomorphisme de graphes étiquetés.

Le problème étudié

Une classification des instabilités capturant les seuls changements dans la topologie du contour apparent est souhaitable pour aborder ce problème sous un angle plus géométrique. On peut alors espérer faire le lien entre les cadres discret et continu, notamment en reconstruction pour étudier le comportement des surfaces d'événements visuels de polyèdres approximant un objet lisse. Demouth et Goaoc [1] ont obtenu des résultats dans ce sens pour des ensembles de convexes disjoints.

Dans cette perspective, le problème étudié consiste à raffiner la classification des instabilités de Gigus et Malik [2] en caractérisant les événements visuels relatifs à la stabilité du contour apparent de polyèdres.

La contribution proposée

Une approche traditionnelle de ce problème consiste à réduire l'étude globale des instabilités à une étude locale, autour des rayons. Ce passage local/global est bien souvent invoqué sans précaution. En travaillant avec une stabilité par isotopie (déplacement continu du contour apparent avec invariance de sa topologie), j'ai pu montrer qu'*un point de vue est stable si et seulement si tous les rayons issus de celui-ci sont stables*.

Partant de ce résultat, j'ai étudié la stabilité des rayons. Ce rapport étudie essentiellement les rayons unilocaux, c'est-à-dire des rayons soit globalement tangent au polyèdre suivant un seul contact, soit bloqué par le polyèdre dès le premier contact. J'ai obtenu une *caractérisation des rayons unilocaux instables*. Le catalogue obtenu fournit de nouveaux types de surfaces d'événements visuels.

Les arguments en faveur de sa validité

Le choix de la stabilité du contour apparent par isotopie permet de détecter des instabilités résultant de l'interaction entre les objets plutôt que celles résultant d'artefacts de la discrétisation de l'objet lisse, inobservables en pratique. Essentiellement, les zones convexes du polyèdre n'engendrent aucune instabilité unilocale. Sur l'exemple simple du tore, on observe que le graphe d'aspect d'un tore polyédrique $2.5D$ est isomorphe à celui d'un tore lisse, modulo la fusion des sommets adjacents dont les vues sont homéomorphes, un premier pas encourageant.

Le bilan et les perspectives

La stabilité par isotopie a permis d'obtenir ces résultats sans avoir eu recours à de gros outils mathématiques. Il reste à terminer le catalogue des rayons instables. Le point difficile à étudier est la possible combinaison d'instabilités unilocales sur un même rayon stable. Deux perspectives se sont dégagées de cette étude.

1. Sous de bonnes conditions de maillage, les instabilités les plus complexes semblent écartées. Il serait alors intéressant de caractériser les instabilités dans ce cadre simplifié afin d'étudier le problème de reconstruction de surfaces d'événements visuels d'un objet lisse.
2. Dans le cadre du calcul de radiosité, la stabilité par isotopie permet d'ignorer une grande part d'instabilités négligeables en pratique mais elle ne capture pas les effets dus à de grandes portions planes. Une extension de ce cadre d'étude permettrait de trouver un juste milieu pour caractériser les instabilités dites « observables ».

1 Introduction

1.1 Problématique

Les surfaces d'événements visuels sont à la base de nombreux outils en visibilité. Elles ont été introduites, à la fin des années soixante-dix, dans les travaux de Koenderink et van Doorn [3] sur les graphes d'aspect. Etant donné un objet, on partitionne l'espace des points de vue en composantes maximales depuis lesquelles la vue de l'objet reste la même ; son graphe d'aspect est le graphe dual de cette décomposition, la zone d'événements visuels est l'union des composantes de dimension non maximale. Cette définition abstraite nécessite de définir les notions de vue d'un objet et d'équivalence (ou de stabilité) de vue. Différents cadres d'étude ont été proposés selon la nature géométrique des objets (polyèdres convexes, polyèdres, surfaces de révolution, surfaces lisses, semi-algébriques,...) et selon le type d'application étudié (reconnaissance d'objets, calcul de contours d'ombre, ε -visibilité,...).

Historiquement, la théorie des singularités a permis l'étude des surfaces lisses suivant une approche différentielle. Toutefois les résultats obtenus ne s'appliquent pas à la classe des polyèdres, vus comme des surfaces lisses par morceaux. Les principaux travaux existants dans le cas polyédrique sont dus à Gigus et Malik [2]. Ils fournissent une classification exhaustive mais grossière des instabilités car leur approche est combinatoire : l'équivalence des deux vues se réduit à l'isomorphisme de deux graphes étiquetés.

Une classification des instabilités capturant les seuls changements dans le contour apparent est souhaitable pour aborder cette étude sous un angle plus géométrique où une fusion des cadres discret et continu est possible. Cette approche demanderait de détecter des instabilités résultant de l'interaction entre les objets plutôt que celles résultant d'artefacts de la discrétisation de l'objet lisse, inobservables en pratique. Ce travail faciliterait alors l'étude du comportement des surfaces d'événements visuels de polyèdres approximant un objet lisse. Demouth et Goaoc [1] ont obtenu des résultats en ce sens pour des ensembles de convexes disjoints.

1.2 Cadre d'étude et résultats

Dans cette étude, on définit la vue d'un objet (polyèdre ou objet lisse) par son *contour apparent* qui est l'ensemble des directions des rayons tangents issus du point de vue. Un point de vue est *stable par isotopie* s'il existe un voisinage de celui-ci dans lequel la vue de l'objet évolue continûment avec invariance de sa topologie. La figure 1 compare, pour ces notions, le graphe d'aspect d'un tore polyédrique 2.5D à celui d'un tore lisse. On remarque qu'en fusionnant les sommets du graphe du polyèdre dont les vues sont homéomorphes, on retrouve le graphe d'aspect du tore lisse. En raffinant les faces latérales du tore en zones convexes, le graphe d'aspect reste inchangé.

Les exemples suivants justifient le choix de la stabilité par isotopie vis-à-vis de la stabilité par homéomorphisme. Dans l'exemple de la figure 2, la traversée du plan bitangent aux deux cubes n'induit pas d'événements visuels pour l'équivalence de vue par homéomorphisme. Néanmoins on ob-

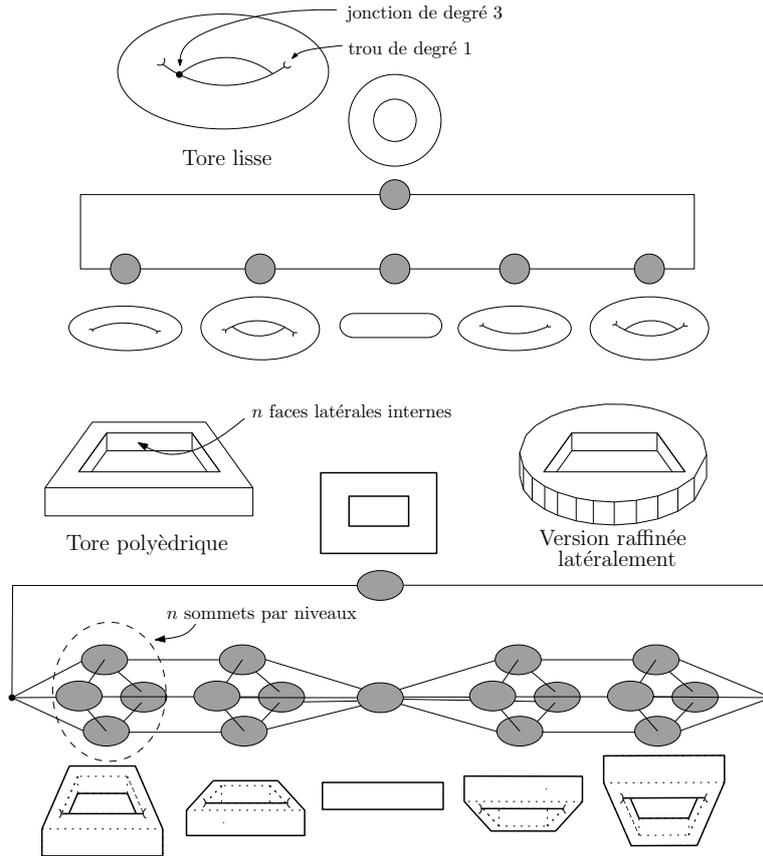


FIG. 1 – Graphes d’aspect d’un tore lisse et d’un tore polyédrique

serve un saut d’une jonction de degré 3 dans le contour apparent, événement visuel pertinent en calcul de radiosité : si on considère le cube en retrait comme une source lumineuse, on observe une discontinuité dans l’évolution de l’éclairément lors de la traversée du plan bitangent aux deux cubes. La notion d’isotopie capture cet événement visuel.

Une approche classique pour étudier les instabilités consiste à les détecter localement autour d’un rayon. Les exemples des figures 2 et 3 montrent que pour la notion d’homéomorphisme, une instabilité locale n’engendre pas nécessairement une instabilité globale : on observe un saut de jonction dans l’exemple de la figure 2 et un échange de topologie dans l’exemple de la figure 3. Par contre, la notion d’isotopie détecte une instabilité globale dans ces deux exemples. Plus généralement, on montre dans ce rapport le résultat suivant :

Théorème 1. *Pour les polyèdres, un point de vue est stable par isotopie si et seulement si tous les rayons issus de celui-ci sont stables par isotopie.*

Ce résultat permet de se restreindre à l’étude de la stabilité autour des rayons. L’essentiel de ce rapport traite des rayons unilocaux, c’est-à-dire des rayons soit globalement tangents au polyèdre suivant un seul contact, soit bloqués par le polyèdre dès le premier contact. On obtient une caractérisation complète des instabilités unilocales pour les polyèdres.

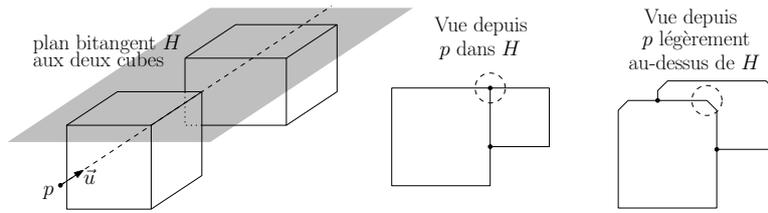


FIG. 2 – Le rayon (p, \vec{u}) est instable mais la topologie du contour reste globalement stable.

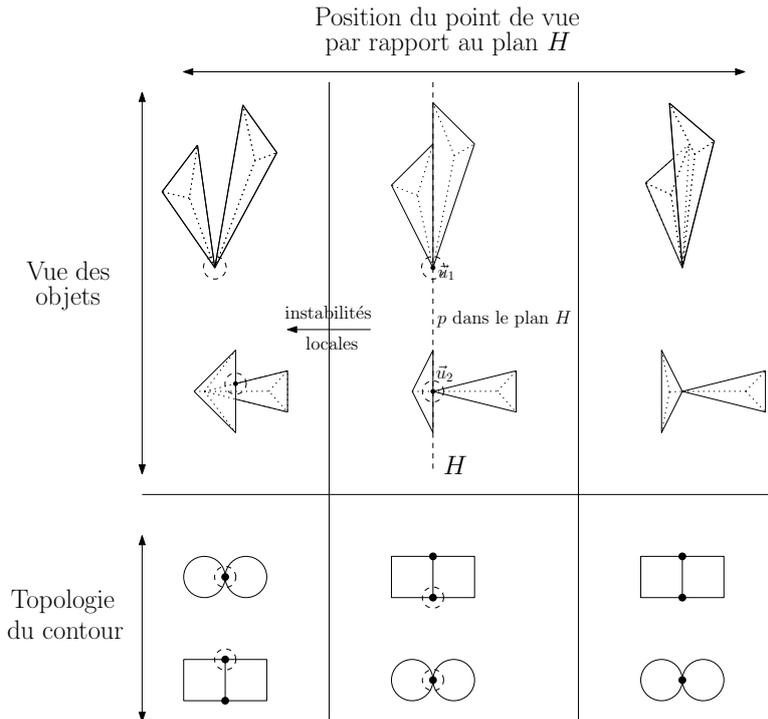


FIG. 3 – Les rayons (p, \vec{u}_1) et (p, \vec{u}_2) sont instables mais la topologie du contour reste globalement stable à cause d'un échange des topologies.

Résultat 2. On construit deux catalogues exhaustifs de rayons unilocaux respectivement stables (page 22) et instables (page 15) pour des polyèdres (théorème 14).

Les surfaces d'événements visuels se situent essentiellement dans les plans supports de deux faces adjacentes en position concave. Les parties convexes du polyèdre n'induisent aucune instabilité unilocale.

1.3 Travaux précédents

Surfaces lisses. Historiquement, les questions relatives à ces surfaces ont été étudiées suivant une approche complètement différentielle par la théorie des singularités. Les notions développées dans ce cadre se traduisent géométriquement : la stabilité de la projection perspective d'une surface induit la stabilité du contour apparent de celle-ci par \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme, la stabilité des germes de la projection peut se traduire par une notion de stabi-

lité locale d'un rayon d'observation. L'article [7] de Whitney est fondateur concernant la classification de ces instabilités locales. La théorie développée par Mather [4] permet de réduire l'étude globale des instabilités à une étude locale. Cependant la classification de ces instabilités n'est définie que pour des classes de surfaces *génériques*, même la classe des surfaces algébriques de bas degré n'est pas générique. [5] fournit un résumé des techniques et résultats dans ce domaine. Notamment, ces résultats sont inapplicables pour les polyèdres vus comme des surfaces lisses par morceaux : la classification la plus générale, due à Rieger [6], concerne des surfaces qui ne peuvent pas avoir de points quadruples.

Polyèdres. Gigus et Malik ont défini dans [2] un cadre d'étude combinatoire, utilisé dans de nombreux travaux en informatique graphique. Ils construisent d'abord un graphe géométrique de support la projection des arêtes visibles du polyèdre (c'est la définition de GSI dans ce rapport) puis un graphe topologique étiqueté, abstraction du graphe précédent : celui-ci (*labelled image structure graph*) constitue la vue d'un polyèdre. Ainsi l'équivalence de vues se traduit par l'isomorphisme de graphes étiquetés.

Dans ce cadre où énormément d'informations sont présentes dans la vue, on obtient une caractérisation complète des surfaces d'événements visuels. Elles sont de deux types : *EEE* engendrées par trois arêtes et *EV* engendrées par un sommet et une arête. Cependant ce surplus d'informations introduit beaucoup trop d'événements visuels : le graphe d'aspect d'une sphère maillée possède un nombre polynômial de sommets en le nombre de facettes dans le maillage.

Dans l'exemple du tore polyédrique de la figure 1, le graphe d'aspect obtenu est le même que celui de Gigus et Malik. Par contre, les sommets dans un même niveau ne sont pas fusionnables dans leur modèle car les vues ne sont pas équivalentes à cause de l'étiquetage. Aussi, la taille du graphe d'aspect change d'échelle pour la version raffinée du tore polyédrique.

Convexes disjoints. Les travaux de Demouth et Goaoc [1] constituent une première tentative d'unification des cadres discret et lisse pour des ensembles de convexes disjoints. Ils donnent une preuve unifiée du fait que les événements visuels, pour la stabilité par homéomorphisme du contour apparent, se situent dans les zones de tritangence et dans les zones de bitangence limite. Toutefois ils ne peuvent conclure à la réciproque dans le cas où deux contours apparents s'intersectent tangentiellement (points de vue *fortement dégénérés*, cf figure 2).

1.4 Organisation du rapport

La section 2 préliminaire pose le cadre formel de cette étude. La section 3 précise globalement le contour apparent d'un polyèdre en introduisant le graphe structure image (GSI) et étudie quelques propriétés de ses fibres suivant la projection perspective. La section 4 donne un schéma de preuve du théorème 1 (détaillée en annexe A). La section 5 fournit une liste de rayons unilocaux dont on montre l'instabilité. La section 6 établit le résultat 2 : on caractérise les configurations autour de rayons unilocaux stables et on

prouve que la liste de la section 5 est un catalogue des rayons unilocaux instables.

2 Préliminaires

2.1 Généralités

\mathbb{R}^3 est muni d'une structure d'espace affine. Pour tout sous-ensemble X de \mathbb{R}^3 , on note $\langle X \rangle$ l'enveloppe affine de X , \overline{X} son adhérence. Une orientation d'un plan est le choix d'un vecteur normal unitaire. Un point hors d'un plan P orienté est dit au-dessus (resp. en-dessous) de P si la normale de P est entrante (resp. sortante) pour le demi-espace contenant ce point. On généralise cette définition à tout sous-ensemble de P .

Polyèdres. Un *polyèdre* \mathcal{P} de \mathbb{R}^3 est un complexe cellulaire fini de dimension 2 plongé linéairement dans \mathbb{R}^3 (les arêtes sont des segments et les faces sont des polygones simples). Dans notre étude, on considérera des polyèdres dont les faces sont convexes et qui définissent une variété topologique sans bord ie :

- toute arête possède exactement deux faces incidentes ;
- l'union des faces fermées contenant un sommet est homéomorphe à un disque topologique.

Différents complexes cellulaires peuvent se plonger sur un même polyèdre \mathcal{P} ; on parle alors de décompositions polyédriques de \mathcal{P} .

Rayons. Un *rayon* d'observation de \mathcal{P} est la donnée d'un *point de vue* p appartenant à $\mathcal{F} = \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{P}$ et d'une direction \vec{u} de \mathbb{S}^2 . On identifie un rayon (p, \vec{u}) de $\mathcal{F} \times \mathbb{S}^2$ avec la demi-droite orientée $[p\vec{u})$. Les composantes connexes d'intersection de $[p\vec{u})$ avec \mathcal{P} sont ordonnées par leurs distances croissantes depuis p .

2.2 Contour apparent

Contact de tangence. Pour tout $p \in \mathcal{F}$, on note $\pi_p : \mathbb{R}^3 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{S}^2$ la projection perspective depuis p définie par $\pi_p(x) = \vec{px} / \|\vec{px}\|$. Soit s une composante connexe d'intersection du rayon $[p\vec{u})$ avec \mathcal{O} , compact de \mathbb{R}^3 . On dit que s est un *contact de tangence* de \mathcal{O} le long du rayon $[p\vec{u})$ s'il existe un voisinage U de s tel que \vec{u} appartient au bord de la projection $\pi_p(\mathcal{P} \cap U)$.

Pour les polyèdres, le voisinage U n'est plus utile et on dispose de la définition équivalente suivante : s est un contact de tangence de \mathcal{P} le long du rayon $[p\vec{u})$ si et seulement si \vec{u} appartient au bord de la projection par π_p des faces de \mathcal{P} intersectant s .

Un rayon est dit *tangent* si sa première composante connexe d'intersection est un contact de tangence. Il est dit *bloqué* sinon. Il est dit *unilocal* s'il est soit tangent sans autre composante connexe d'intersection, soit bloqué.

Contour apparent. Le *contour* apparent de \mathcal{P} depuis p , noté Δ_p , est l'ensemble des directions des rayons tangents à \mathcal{P} issus de p . Cette définition ne dépend pas de la décomposition polyédrique choisie, ni même de la nature

polyédrique de l'objet : on peut l'appliquer à tout compact de \mathbb{R}^3 . Le contour apparent du tore (lisse et polyédrique) est représenté à la figure 1.

Topologie locale du contour. Sauf pour des compacts atypiques, le contour d'un objet est d'intérieur vide dans \mathbb{S}^2 . Un point \vec{u} de $\overline{\Delta}_p$ est *régulier* si $\overline{\Delta}_p$ est homéomorphe à \mathbb{R} au voisinage de \vec{u} . Les points non réguliers de $\overline{\Delta}_p$ sont dits de *branchement*. Si un point de branchement peut être isolé des autres, on définit son degré par le nombre de branches localement autour de \vec{u} . Les points de branchement n'appartenant pas à $\overline{\Delta}_p$ sont appelés *trous*, les autres sont appelés *jonctions* (cf figure 1).

2.3 Remarques locales sur le contour.

Une condition suffisante pour être un contact de tangence est lorsqu'on peut se ramener localement au cas convexe. Un *plan support de \mathcal{O} localement en $X \in \mathcal{O}$* est un plan contenant X qui délimite un demi-espace fermé contenant $\mathcal{P} \cap U$ où U est un voisinage de X . Si X est une composante connexe d'intersection d'un rayon avec \mathcal{O} , alors X est un contact de tangence.

Le lemme suivant indique que le contour apparent autour d'un rayon se voit comme la superposition des contours apparents qu'on observerait autour de chaque composante connexe d'intersection du rayon avec le polyèdre, les parties cachées par des faces en amont étant non visibles.

Lemme 3. *Soient $\vec{u} \in \mathbb{S}^2$, $p \in \mathcal{F}$, l le nombre de composantes connexes d'intersection de $[p\vec{u}]$ avec le polyèdre \mathcal{P} . On note \mathcal{P}_j l'union des faces fermées incidentes à la j^e composante. Il existe un voisinage β de p et une boule ouverte D centrée en \vec{u} tels que pour tout q dans β ,*

$$\Delta_q(\mathcal{P}) \cap D = \bigcup_{j \geq 1} \Delta_q^j(\mathcal{P}) \cap D \quad \text{où} \quad \Delta_q^j(\mathcal{P}) = \Delta_q(\mathcal{P}_j) \cap (\pi_p(\mathcal{P}_j) \setminus \pi_p(\cup_{i < j} \mathcal{P}_i)).$$

Démonstration. Découle essentiellement du fait que l'ensemble des rayons n'intersectant pas un compact de \mathbb{R}^3 est un ouvert de $\mathcal{F} \times \mathbb{S}^2$. \square

2.4 Stabilité

On dira qu'un point de vue p est stable lorsque le contour apparent observé depuis q varie continûment pour tout déplacement continu et local de q dans un voisinage de p . Plus formellement, un point de vue p est *stable* s'il existe un voisinage β de p et une application continue $\psi : \beta \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tels que :

- (i) $\psi(p, \cdot)$ est l'identité sur \mathbb{S}^2 et
- (ii) pour tout q dans β , $\psi(q, \cdot)$ est un homéomorphisme de \mathbb{S}^2 qui induit un homéomorphisme de Δ_p sur Δ_q .

L'hypothèse de continuité de ψ est essentielle pour considérer des isotopies. Sans celle-ci, on retrouverait la notion d'homéomorphisme dont on a observé les limitations en introduction.

Cette notion peut aussi se décider localement autour d'un rayon. Un rayon (p, \vec{u}) est *stable*¹ si et seulement si pour toute boule ouverte B centrée

¹La *stabilité de germe* issue de la théorie des singularités se définit ainsi : pour tout voisinage U de \vec{u} , il existe un voisinage β de p tel que pour tout q dans β , il existe \vec{v} dans

en \vec{u} suffisamment petite, le point de vue p est stable pour la définition précédente avec B à la place de \mathbb{S}^2 . Lorsque le contour depuis p dans B est vide, cette définition signifie qu'il en est de même pour le contour depuis q pour tout q dans β .

3 Graphe de structure image (GSI)

Cette section caractérise la structure globale du contour apparent en s'appuyant sur le graphe de structure image, sous-ensemble de la projection des arêtes du polyèdre. On y étudie également la géométrie du polyèdre autour des zones se projetant sur ce graphe.

Définition. Le *dessin image* de \mathcal{P} depuis p est l'ensemble des directions des rayons issus de p dont le premier point d'intersection avec \mathcal{P} appartient à un sommet ou à une arête de \mathcal{P} . C'est un arrangement fini d'arcs de grand cercle fermés.

Le *graphe de structure image* de \mathcal{P} depuis p est un graphe géométrique de \mathbb{S}^2 de support le dessin image de \mathcal{P} . Ses sommets sont d'une part les jonctions du dessin image, d'autre part les points réguliers du dessin image, images d'un sommet de \mathcal{P} par π_p . Ses arêtes sont les composantes connexes du complémentaire des sommets dans le dessin image. Afin d'éviter toute confusion entre arête du polyèdre et arête du GSI, on utilisera le terme d'*arc* pour désigner une arête du GSI.

Comparaisons avec le graphe LISG de Gigus et Malik [2]. Le LISG est un graphe abstrait étiqueté par les arêtes du polyèdre tandis que le GSI est un graphe géométrique plongé dans \mathbb{S}^2 sans étiquette. Toutefois ces deux objets sont fortement dépendants. Dans [2], le LISG est obtenu comme une abstraction d'un graphe géométrique GSI' de support le dessin image sur lequel on distingue deux types de sommets, les *V-jonctions* (projection de sommets premièrement visibles) et les *T-jonctions* (intersection des projections de deux arêtes visibles). Ici, le GSI est une subdivision du GSI' afin d'obtenir qu'un arc du GSI ne contienne la projection d'aucun des sommets du polyèdre.

Faces du GSI. On définit les faces du GSI comme les composantes connexes du complémentaire du dessin image dans \mathbb{S}^2 . Si on note $v_p(\vec{u})$ le premier point d'intersection de $[p\vec{u})$ avec le polyèdre \mathcal{P} (noté ∞ si l'intersection est vide), on obtient que pour toute face f du GSI, il existe une unique face F_f de \mathcal{P} (éventuellement face infinie $\{\infty\}$) telle que $v_p(f) \subseteq F_f$. F_f est la *face associée* à la face f du GSI dans \mathcal{P} .

Fibre d'un arc. Par construction, un arc e (ouvert) ne contient la projection d'aucun sommet du polyèdre. Ainsi la géométrie du polyèdre autour d'un rayon de direction dans e est invariante sur e . Notons $C(p, e)$ le cône engendré par p et e , ie l'union des rayons $[p\vec{u})$ pour \vec{u} dans e , $f_1(e)$ et $f_2(e)$

U , un voisinage $B_{\vec{u}}$ de \vec{u} , $B_{\vec{v}}$ de \vec{v} tels que $\Delta_p \cap B_{\vec{u}}$ et $\Delta_q \cap B_{\vec{v}}$ sont homéomorphes. Pour la stabilité des rayons introduite ici, la principale différence est qu'on contraint les $B_{\vec{v}}$ à être égaux à un même B .

les faces de \mathcal{P} associées aux faces du GSI adjacentes suivant e , $l_1(e)$ et $l_2(e)$ leurs intersections respectives avec $C(p, e)$. La *fibre* de e depuis p est l'intersection du polyèdre sur $C(p, e)$ dans la partie comprise entre $l_1(e)$ et $l_2(e)$ (cf figure 4).

Les composantes connexes de la fibre e sont rencontrées dans le même ordre pour tous les rayons de direction dans e : on parlera de cet ordre sans faire mention d'un quelconque rayon. On numérote $l_1(e)$ et $l_2(e)$ de façon à ce que $l_1(e)$ soit rencontré avant $l_2(e)$.

Ces composantes sont des lieux de contact de tangence des rayons sauf éventuellement pour celle contenant $l_2(e)$. Celle-ci est un lieu de contact de tangence uniquement lorsque $f_2(e)$ possède une face adjacente le long de $l_2(e)$ contenue dans $\langle C(p, e) \rangle$ hors de la fibre.

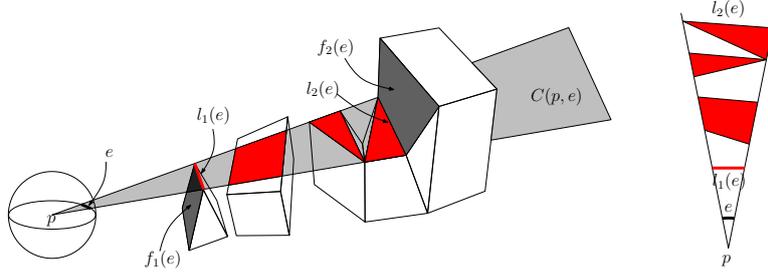


FIG. 4 – Exemple de fibre d'un arc du GSI

Arcs de contour, interne. Un arc est dit de *contour* s'il est inclus dans le contour apparent du polyèdre, *interne* s'il est disjoint de celui-ci. Un arc e de contour est orienté tel que $\pi_p(f_1(e))$ soit à droite de e . On remarque que ces définitions sont en correspondance avec celles de [2].

Lemme 4. *Un arc (ouvert) est soit de contour, soit interne. L'orientation d'un arc de contour est unique.*

Démonstration. Soit e un arc du GSI. Si $l_1(e)$ et $l_2(e)$ appartiennent à la même composante connexe de la fibre de e , alors tout \vec{u} de e est à l'intérieur de la projection $\pi_p(f_1(e) \cup f_2(e))$ et donc e est interne. Sinon pour tout $\vec{u} \in e$, le plan $\langle C(p, e) \rangle$ est localement support en la première composante de la fibre de e et donc e est de contour.

Lorsque e est de contour, $f_1(e)$ est définie de façon unique, il en est donc de même de l'orientation de e . \square

Corollaire 5. *Le contour apparent d'un polyèdre est l'union d'un sous-ensemble de sommets et d'arcs du GSI.*

Démonstration. Il suffit de montrer que Δ_p est inclus dans le GSI d'après le lemme 4. Soit \vec{u} dans une face du GSI, F la face de \mathcal{P} associée. Si $F = \infty$ alors le rayon $[p\vec{u})$ n'intersecte pas \mathcal{P} et donc \vec{u} n'appartient pas au contour. Sinon $[p\vec{u})$ intersecte l'intérieur de F en un point qui n'est donc pas un contact de tangence. Donc Δ_p est inclus dans le GSI et le lemme 4 permet de conclure. \square

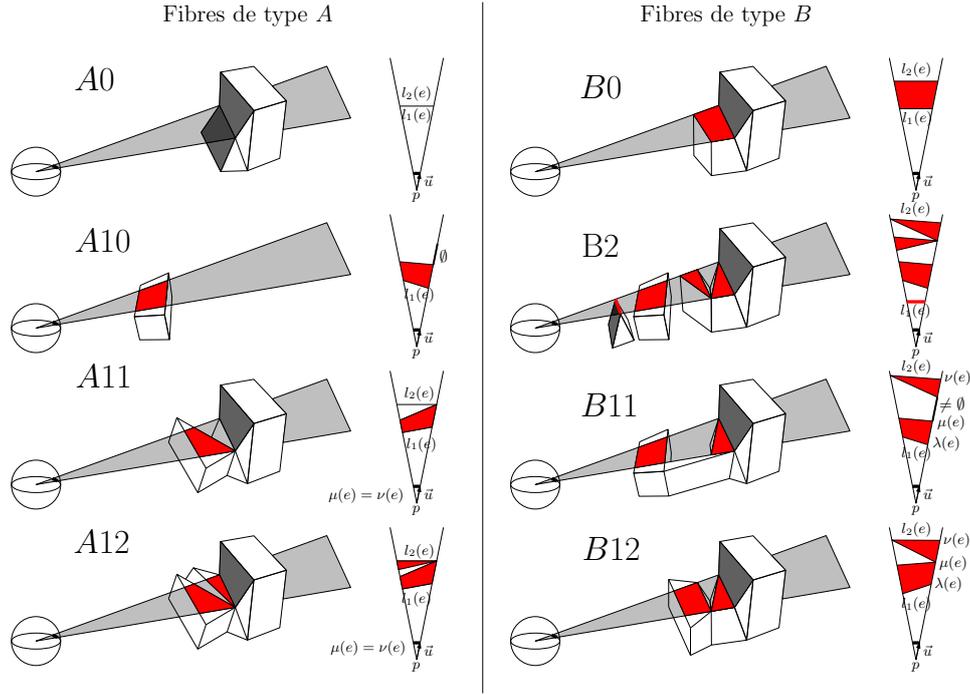


FIG. 5 – Classification des fibres d'arcs incidents à \vec{u}

Classification des fibres d'un arc incident à \vec{u} . On considère \vec{u} dans le GSI : les branches incidentes à \vec{u} sont des arcs (ou portions d'arc, on ne fera pas la distinction dans toute la suite). On classe les fibres de ces arcs suivant leur nombre k de composantes contacts de tangence et les positions de celles-ci sur le rayon $[p\vec{u})$ (cf figure 5) :

$k = 0$. L'arête est interne. Si $l_1(e) = l_2(e)$, on a une fibre de type A0. Sinon, on a une fibre de type B0.

$k \geq 2$. On a une fibre de type B2.

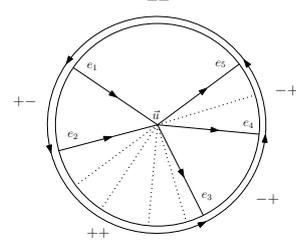
$k = 1$. On note $\lambda(e)$ (resp. $\mu(e)$) le premier (resp. dernier) point de l'adhérence de la première composante de la fibre sur $[p\vec{u})$. On note $\nu(e)$ le point de l'adhérence de $l_2(e)$ sur $[p\vec{u})$. On a les trois cas suivants :

- $\mu(e) = \nu(e)$, on a une fibre de type A11 ou A12 ;
- $\mu(e) < \nu(e)$ et l'intersection de $[p\vec{u})$ avec \mathcal{P} est non vide juste après $\mu(e)$, on a une fibre de type B11 ou B12 ;
- $\mu(e) < \nu(e)$ et l'intersection de $[p\vec{u})$ avec \mathcal{P} est vide juste après $\mu(e)$, on a une fibre de type A10.

Si le rayon $[p\vec{u})$ est unilocal, la face $f_2(e)$ est nécessairement infinie pour une fibre de type A10.

Configuration autour d'un rayon. Une *configuration* autour de \vec{u} dans le GSI est une description de la nature et de la position des fibres des arcs incidents à \vec{u} (on ordonne ces arcs autour de \vec{u} dans le sens trigonométrique). On définit le type ++, +- et -- d'un secteur local autour de \vec{u} comme suit.

Considérons le secteur local dans \mathbb{S}^2 défini par les deux arêtes de contour e_1 et e_2 consécutives incidentes à \vec{u} . On traverse e_1 (resp. e_2) dans le sens entrant (resp. sortant) pour \vec{u} . On caractérise ce secteur par le double signe $\varepsilon_1\varepsilon_2$ où $\varepsilon_i = +$ si la traversée de e_i est de même sens que son orientation, $\varepsilon_i = -$ sinon.



Lemme 6. Soit \vec{u} dans le GSI dont les arcs internes ont tous une fibre de type A0. Soient e_1 et e_2 deux arcs de contour incidents à \vec{u} consécutifs et considérons le secteur local qu'elles définissent :

- type ++ : on a $\lambda(e_1) = \lambda(e_2)$;
- type +- : on a $\lambda(e_1) \geq \lambda(e_2)$;
- si $e_1 = e_2$, alors $\lambda(e_1) = \mu(e_1) = \nu(e_1)$.

Dans tous les cas, le secteur correspondant ne possède pas de face infinie.

Démonstration. Découle du fait que les fibres A0 de deux arêtes internes consécutives s'intersectent en un même point sur $[p\vec{u}]$. \square

4 Passage local/global

Le but de cette section est de présenter les idées de la preuve du théorème 1 dont les détails se trouvent en annexe A. Que ce soit dans [1] ou dans les exemples des figures 2 et 3, on remarque que le sens le plus problématique est le passage de la stabilité globale à la stabilité locale. Pour le schéma de preuve présenté ici, on dispose des caractéristiques essentielles suivantes :

1. la topologie du contour : il possède un nombre fini de branchements et les composantes maximales de points réguliers forment des courbes simples ; pour les polyèdres, cela est fourni par le corollaire 5 ;
2. la stabilité par isotopie : elle fournit des homéomorphismes entre les contours mais surtout la continuité du déplacement de ceux-ci ; la continuité est indispensable pour ne pas prendre en compte une stabilité par homéomorphisme, pour laquelle le résultat est faux ;
3. la géométrie du contour (et de l'objet) qui permet de renforcer l'hypothèse de continuité afin d'écartier tout phénomène atypique ; dans le contour d'un polyèdre, les points réguliers forment des arcs de grand cercle polygonaux (corollaire 5).

Dans un premier temps, les deux premières caractéristiques permettent de construire un voisinage du contour qui évolue dans celui-ci comme on le souhaite au voisinage de p . Ce voisinage est de type représenté à la figure 6. Il y a autant de zones tubulaires (tubes) que de composantes maximales de points réguliers dans le contour. On conclut immédiatement à la stabilité des rayons de direction hors de $\overline{\Delta}_p$.

Dans un second temps, la troisième caractéristique (pour les polyèdres) permet de plus de montrer le fait suivant : étant donné une courbe convexe γ séparant « transversalement » un tube suffisamment petit (cf figure 6), la courbe du contour passant par ce tube intersecte γ en un unique point pour tout point de vue dans un voisinage de p . On montre alors la stabilité des rayons de direction dans $\overline{\Delta}_p$.

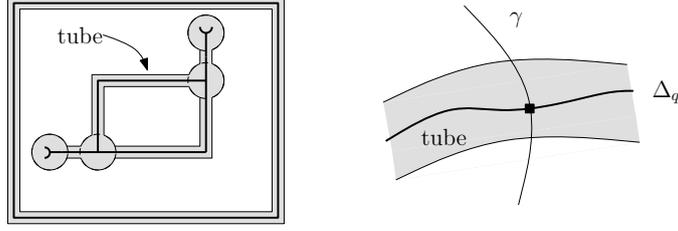


FIG. 6 –

Corollaire 7. *L'ensemble des rayons instables est un fermé de $\mathcal{F} \times \mathbb{S}^2$.*

Démonstration. On montre que l'ensemble des rayons stables est un ouvert de $\mathcal{F} \times \mathbb{S}^2$. Etant donné une boule ouverte B caractérisant la stabilité d'un rayon (p, \vec{u}) , on peut prolonger l'isotopie correspondante sur \overline{B} compact. Les points de $\overline{\Delta_p} \cap B \setminus \Delta_p$ jouent le même rôle que des points de branchement. On montre la stabilité des rayons (q, \vec{v}) pour q dans un voisinage de p et \vec{v} dans B (et non dans \overline{B}) avec la même technique présentée précédemment. \square

Pour le passage du local au global, il s'agit de techniques classiques en analyse : on construit d'abord une isotopie $\psi : \beta \times \Delta_p \rightarrow \mathbb{S}^2$ à partir du recollement des isotopies locales ambiantes des rayons puis on étend cette isotopie en une isotopie ambiante sur \mathbb{S}^2 , possible en s'appuyant sur la topologie classique des composantes de $\mathbb{S}^2 \setminus \Delta_p$ (une partie du travail est réalisé dans [1]).

5 Instabilités de rayons unilocaux

Dans cette section, on présente trois types d'instabilités unilocales :

1. les instabilités Q^\sim et Q° , de nature intrinsèque, qui résultent exclusivement des « creux » entre faces causées par la non-convexité ;
2. les instabilités Q^{F} , Q^{O} et Q^\ominus , de nature plus structurelle, qui prennent en compte l'agencement de deux faces en position convexe par rapport aux autres ;
3. les instabilités $\overline{T++T}$, limites d'une instabilité multilocale.

La figure 8 présente les événements visuels classiques observés pour ces instabilités. Avant de les étudier, on introduit quelques définitions préliminaires.

5.1 Préliminaire : métafaces

Soient S un demi-plan, S^ε la bande ouverte de largeur ε contenue dans S dont le bord contient celui de S . On définit l'ensemble $F(S)$ des intersections sur S des faces (fermées) f du polyèdre \mathcal{P} intersectant le bord de S et vérifiant une des conditions suivantes :

- f est incluse dans $\langle S \rangle$,
- f intersecte $\langle S \rangle$ selon une de ses arête e , f' la seconde face incidente à e telle que f et f' se trouvent dans le même demi-espace fermé défini par $\langle S \rangle$.

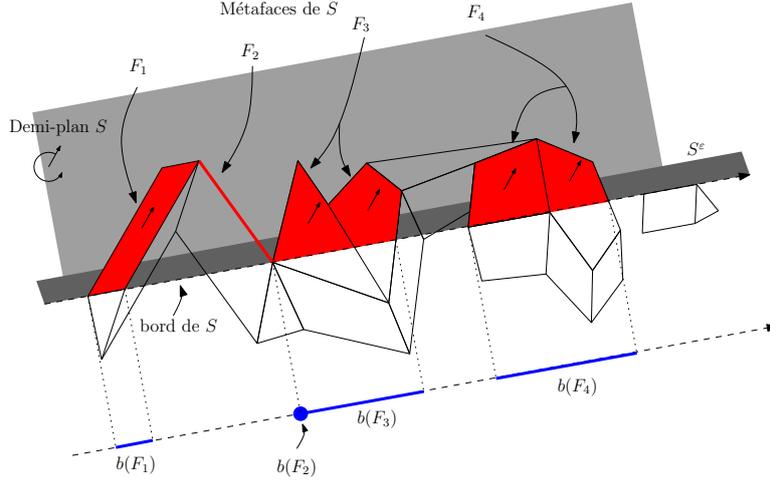


FIG. 7 – Exemple de métaface d’un demi-plan

Le nombre de composantes connexes de l’intersection de S^ε avec l’union des éléments de $F(S)$ est indépendant de ε pour ε suffisamment petit. Une *métaface* F sur S est une union maximale d’éléments de $F(S)$ intersectant une telle composante connexe (cf figure 7). S est le *demi-plan sous-jacent* à F . La *bordure* de la métaface F sur S , notée $b(F)$, est l’intersection de F avec le bord de S . Soit f une face de \mathcal{P} telle que $f \cap S$ est un élément de $F(S)$ non réduit à un segment. La *métaface associée* à f sur S est l’unique métaface sur S contenant $f \cap S$.

Métafaces en position convexe, concave. Les faces du polyèdre composant une même métaface F sur S ont toutes la même normale sortante : c’est l’orientation de S induite par celle de F . Considérons deux métafaces F_1 et F_2 sur S_1 et S_2 distincts de même bord et telles que $b(F_1)$ et $b(F_2)$ s’intersectent. Lorsque cette intersection est un segment, on définit classiquement la position convexe ou concave de ces deux métafaces comme pour deux faces adjacentes du polyèdre.

On généralise cette définition lorsque l’intersection des bordures des métafaces est réduite à un point dans le cas suivant : une des composantes connexes de $\mathbb{R}^3 \setminus (S_1 \cup S_2)$ est un dièdre D dont les faces ont des normales sortantes de même sens que celles des S_i induites par les F_i . C’est le *dièdre associé* à F_1 et F_2 . L’angle de D est défini par l’angle du secteur plan obtenu par intersection de D avec un plan orthogonal à l’une de ses génératrices. On dit que les métafaces F_1 et F_2 sont en position *convexe* (resp. *concave*) lorsque l’angle du dièdre D est $\leq \pi$ (resp. $> \pi$).

5.2 Surfaces d’événements visuels

Pour chaque type d’instabilités, on décrit une configuration de rayons qui forment, avec leurs rayons adhérents, un ensemble caractéristique $Q \subseteq \mathcal{F} \times \mathbb{S}^2$ de rayons instables (corollaire 7). Les surfaces d’événements visuels correspondantes seront l’ensemble des points de vue depuis lesquels est issu un rayon dans Q (définition valide d’après le théorème 1). Par abus de notation, on notera Q ces mêmes surfaces.

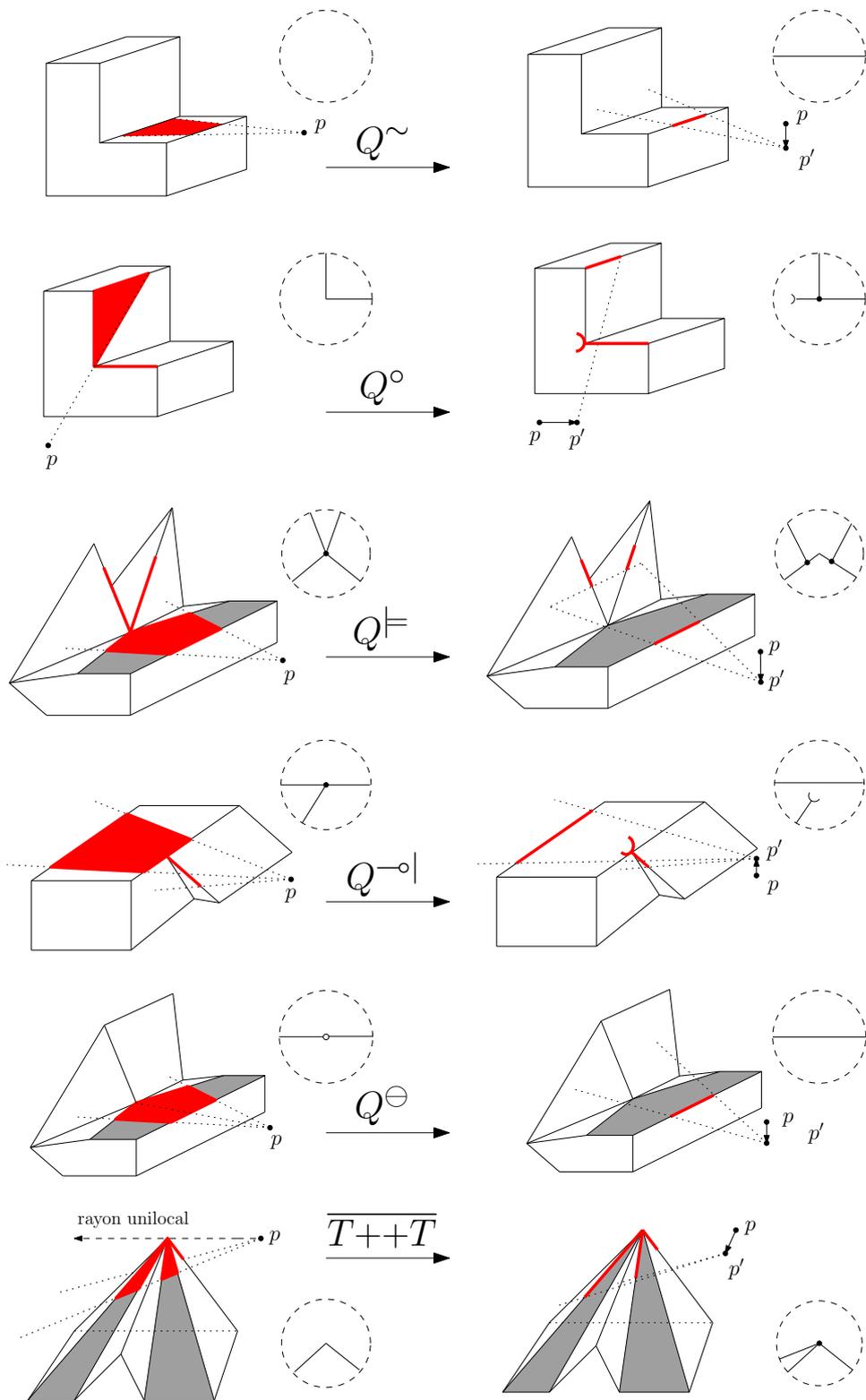


FIG. 8 – Instabilités unilocales

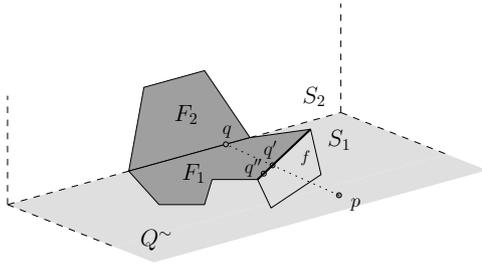


FIG. 9 – Zone Q^\sim

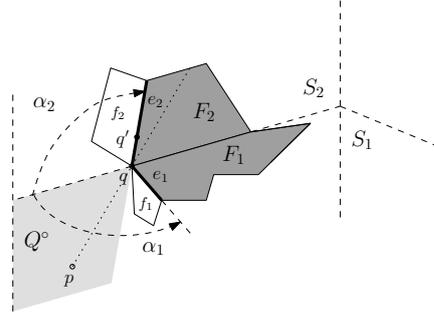


FIG. 10 – Zone Q°

Pour montrer l'instabilité d'un rayon (p, \vec{u}) dans une configuration donnée, on considérera n'importe quel voisinage D suffisamment petit fourni par le lemme 3, sans y faire mention, et on observera bien souvent qu'il existe q arbitrairement proche de p tel que $\Delta_q \cap D$ n'est pas homéomorphe à $\Delta_p \cap D$. L'intersection $\Delta_q \cap D$ sera appelée *contour apparent local* depuis q .

5.2.1 Instabilités intrinsèques Q^\sim et Q°

Pseudo-tangence. Considérons la situation de la figure 9 : deux métafaces F_1 et F_2 en position concave, dont l'intersection des bordures est un segment s . On considère un rayon d'origine p contenu dans le demi-plan support de F_1 qui intersecte l'intérieur de s en q . En notant q' le premier point d'intersection du rayon avec F_1 , on suppose de plus que le segment $[pq']$ est disjoint du polyèdre et que le segment $]q'q[$ est inclus dans l'intérieur (relatif) de F_1 . Un tel rayon appartient à la *zone de pseudo-tangence* Q^\sim de F_1 contre F_2 .

Lemme 8. *Un rayon dans une zone de pseudo-tangence Q^\sim est instable.*

Démonstration. Notons q'' tout point suffisamment proche de q' sur une arête e bordant F_1 (on suppose cette arête unique pour chaque q'' afin de simplifier la preuve). Notons f la face adjacente à F_1 le long de e , elle se trouve nécessairement sous F_1 . p' désignera un point sous F_1 proche de p .

Vue depuis p . Le rayon $[pq'']$ n'est pas tangent au polyèdre car la direction du rayon est intérieur à la projection de f et F_2 . Les autres rayons autour de $[p\vec{u}]$ ne sont pas tangents car ils intersectent l'intérieur de f ou F_2 . Ainsi le contour apparent local depuis p est de type vide.

Vue depuis p' . Le rayon $[p'q'']$ est tangent car le plan $\langle F_1 \rangle$ est localement support en q'' . Les autres rayons ne sont pas tangents comme précédemment. Ainsi le contour apparent local depuis p' est de type régulier. \square

Absorption de jonction. Considérons la situation de la figure 10 : deux métafaces F_1 et F_2 en position concave, dont les bordures s'intersectent, notons q une extrémité de l'intersection. On considère un rayon d'origine p contenu dans $\langle F_2 \rangle$ sous F_1 qui intersecte le polyèdre la première fois en q et qui traverse ensuite l'intérieur (relatif) de F_2 . En notant e_i l'arête de F_i incidente à q d'angle α_i minimum et f_i la face adjacente à F_i suivant e_i , on suppose de plus que f_i se trouve en-dessous de $\langle F_i \rangle$. Un tel rayon appartient à la *zone d'absorption de jonction* Q° de F_1 contre F_2 du côté de q (e_1, e_2).

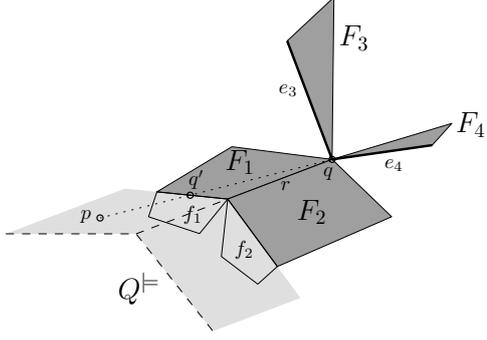


FIG. 11 – Zone $Q^=$

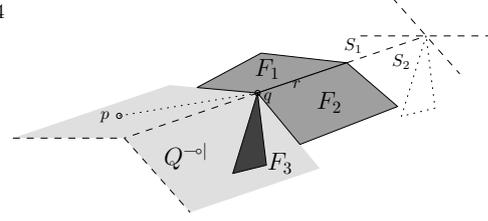


FIG. 12 – Zone $Q^{-|}$

Lemme 9. *Un rayon dans une zone d'absorption de jonction Q° est instable.*

Démonstration. Cette preuve nécessite une observation minutieuse du polyèdre. En particulier elle utilise la propriété que l'ensemble des faces contenant q forme un disque topologique. On note p' un point proche de p au-dessus de $\langle F_2 \rangle$. L'idée de la preuve est plus simple lorsque les bordures de F_1 et de F_2 s'intersectent le long d'un segment.

Vue depuis p . Pour $q' \neq q$, le rayon $[pq')$ est tangent car le plan $\langle F_i \rangle$ est localement support en q' suivant que q' est dans e_1 ou e_2 . On observe que le rayon $[pq)$ est tangent. Le contour apparent local depuis p est de type régulier, voire jonction (résultant d'arêtes incidentes à q sous $\langle F_1 \rangle$).

Vue depuis p' . Au point de vue p' au-dessus de F_2 proche de p . Pour $q' \neq q$ dans e_1 , le rayon $[p'q')$ reste tangent comme précédemment. Par contre, le rayon $[p'q)$ n'est pas tangent. Ainsi on observe un trou dans le contour apparent local depuis p' .

Si $b(F_1) \cap b(F_2)$ est réduit à un point, on observe soit le même événement visuel, soit la diminution du degré du branchement, soit un « saut » de branche (discontinuité de l'évolution du contour apparent local). \square

5.2.2 Instabilités structurelles $Q^=$, $Q^{-|}$ et Q^\ominus

Démultiplication de branchement. Considérons la situation de la figure 11 : deux métafaces F_1 et F_2 en position convexe dont les bordures sont égales à un même segment $r = [aq]$, et deux métafaces F_3 et F_4 , chacune au-dessus de F_1 ou F_2 , dont les bordures ont une extrémités commune q . On considère un rayon d'origine p dans le demi-plan support de F_1 (ou F_2) passant par q . En notant q' le premier point d'intersection du rayon avec F_1 (ou F_2), on suppose de plus que le segment $[pq'[,$ est disjoint du polyèdre et $]q'q[$ est inclus dans l'intérieur (relatif) de F_1 (ou F_2). Un tel rayon appartient à la *zone de démultiplication de branchement* $Q^=$ de F_1 (ou F_2) contre F_3 et F_4 .

Lemme 10. *Un rayon dans une zone de démultiplication de branchement $Q^=$ est instable.*

Démonstration. Omise (cf figure 8). \square

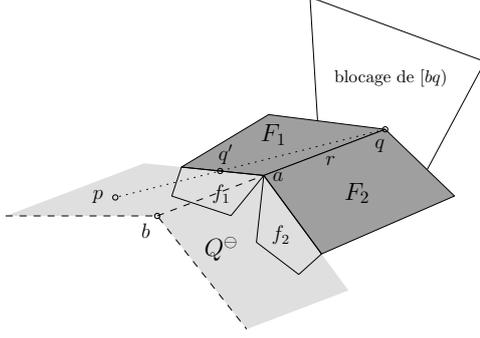


FIG. 13 – Zone Q^{\ominus}

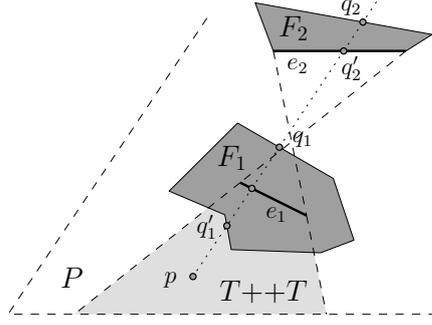


FIG. 14 – Zone $T++T$

Décrochage de branche. Considérons la situation de la figure 12 : deux métafaces F_1 et F_2 en position convexe dont les bordures sont égales à un même segment. Fixons q une extrémité de ce segment. On suppose que toute métaface dont la bordure contient q se situent en-dessous de $\langle F_1 \rangle$ et de $\langle F_2 \rangle$ et qu'il existe une telle métaface F_3 distincte de F_1 et F_2 . On considère un rayon d'origine p dans le demi-plan support de F_1 (ou de F_2) intersectant le polyèdre pour la première fois en q . Un tel rayon appartient à la *zone de décrochage de branche* Q^{\ominus} de F_1 (ou F_2) contre F_3 .

Lemme 11. *Un rayon dans une zone de décrochage de branche Q^{\ominus} est instable.*

Démonstration. Omise (cf figure 8). □

Fusion de branches. Considérons la situation de la figure 13 : deux métafaces F_1 et F_2 en position convexe dont les bordures sont égales à un même segment $[aq]$. On suppose de plus que pour tout b sur $\langle [aq] \rangle$ tel que a est dans $]bq[$, le rayon $[bq]$ n'est pas tangent. On considère un rayon d'origine p dans le demi-plan support de F_1 (ou F_2) passant par q tel que, en notant q' le premier point d'intersection du rayon avec F_1 (ou F_2), le segment $]pq'[,$ est disjoint du polyèdre et le segment $]q'q[$ est inclus dans l'intérieur (relatif) de F_1 (ou F_2). Un tel rayon appartient à la *zone de fusion de branches* Q^{\ominus} de F_1 (ou F_2).

Lemme 12. *Un rayon dans une zone de fusion de branches Q^{\ominus} est instable.*

Démonstration. Omise (cf figure 8). □

5.2.3 Instabilité multilocale limite $\overline{T++T}$

Zone $T++T$. Considérons deux arêtes (ouvertes) e_1 et e_2 du polyèdre contenues dans un même plan P . On note F_i l'union des métafaces de bordure contenant e_i et de demi-plan sous-jacent S inclus dans P de bordure $\langle e_i \rangle$. La zone $T++T$ de e_1 vers e_2 est l'ensemble des rayons (p, \vec{u}) qui ne sont pas dans une zone Q^{\sim} et qui vérifient :

- $p \in P \setminus (F_1 \cup F_2)$ et il existe q_i, q'_i dans $F_i \cap]p\vec{u}$ tels que,
- les segments $]pq'_i[$ et $]q_1q'_2[$ sont disjoints du polyèdre,
- le segment $]q'_i q_i[$ est dans l'intérieur (relatif) de F_i .

Les rayons dans $\overline{T++T}$ sont les rayons unilocaux dans l'adhérence d'une zone $T++T$. Ces situations sont illustrées à la figure 14.

Lemme 13. *Un rayon dans une zone $\overline{T++T}$ est instable.*

Démonstration. Pour un rayon dans une zone $T++T$, on observe classiquement un dédoublement de la courbe simple du contour apparent local depuis p en se déplaçant dans le demi-espace délimité par P depuis lequel la zone entre F_1 et F_2 est visible. Le corollaire 7 conclut. \square

6 Caractérisation des rayons unilocaux stables

Dans un premier temps, on fournit des conditions nécessaires de stabilité des rayons unilocaux $[p\vec{u}]$ en caractérisant les fibres des arcs incidents à \vec{u} (section 6.1) puis les configurations autour de ces rayons (section 6.2). Dans un second temps, on montre que ces conditions sont suffisantes en prouvant la stabilité des rayons obtenus (section 6.3). On obtient un catalogue \mathcal{C}_S des configurations de rayons unilocaux stables.

Plus précisément, on montre dans les sections 6.1 et 6.2 qu'un rayon de configuration dans \mathcal{C}_S est dans une zone d'événements visuels de la section 5. Ces zones constituent alors un catalogue \mathcal{C}_I des rayons unilocaux instables, « complémentaire » de \mathcal{C}_S .

On prouve alors le théorème suivant :

Théorème 14. *Un rayon unilocal est stable si et seulement si sa configuration est dans \mathcal{C}_S . Un rayon unilocal est instable si et seulement s'il appartient à \mathcal{C}_I .*

6.1 Contraintes sur les fibres des arcs incidents

Lemme 15. *Soit (p, \vec{u}) un rayon unilocal, \vec{u} dans le GSI. Si une fibre d'un arc incident à \vec{u} est de type B, alors le rayon appartient à \mathcal{C}_I .*

Démonstration. Cas B0. Le rayon appartient à une zone Q^\sim .

Cas B2. $\langle C(p, e) \rangle$ définit une surface de type $T++T$ et donc le rayon appartient à une zone $\overline{T++T}$.

Cas B11. Dans ce cas, le rayon intersecte le polyèdre suivant un seul segment et l'arête e vérifie que $\mu(e)$ est intérieur à ce segment et qu'aucune autre composante de la fibre de e n'est incidente à $\mu(e)$ (cf figure 15). On note F la métaface de la première composante de la fibre de e . Des deux métafaces incidentes au rayon en $\mu(e)$ et le long d'un segment après $\mu(e)$, on choisit celle dont l'orientation « tourne » dans le même sens que celle de F . On considère également F_2 la métaface incidente à $\mu(e)$ et adjacente à F suivant un segment.

Soit θ l'angle entre les projetés de F_1 et F comme représenté à la figure 15. Si $\theta > \pi$, alors le rayon est dans une zone $\overline{T++T}$ entre F et F_1 (inclus dans le plan de la métaface F). Si $\theta \leq \pi$, alors le rayon est dans une zone Q° de F_2 contre F_1 (les deux métafaces sont bien en position concave car du même côté de $\langle C(p, e) \rangle$).

Cas B12. On note F_1 la première composante de la fibre de e , F_2 la seconde composante et F_3 la métaface incidente à $\mu(e)$ et adjacente à F_2 suivant un segment. Si F_2 et F_3 sont en position concave, alors le rayon

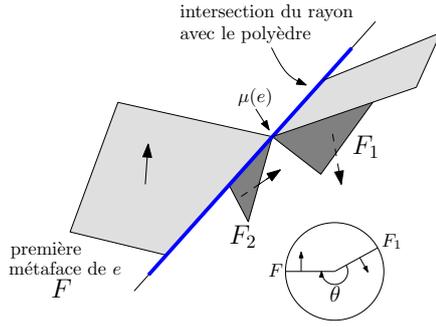


FIG. 15 –

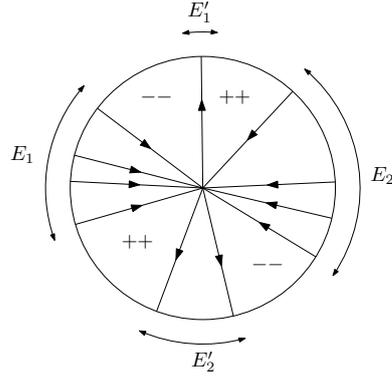


FIG. 16 –

appartient à une zone Q^\sim de F_2 contre F_3 . Si F_2 et F_3 sont en position convexe, alors le rayon appartient à une zone $Q^{-\circ}$ de F_1 contre F_2 et F_3 . \square

Corollaire 16. *Soit (p, \vec{u}) un rayon unilocal. S'il est stable, alors les fibres des arcs incidents à \vec{u} sont de type A.*

6.2 Contraintes sur les configurations

On poursuit ici la recherche de conditions nécessaires pour la stabilité des rayons unilocaux stables. D'après le corollaire 16, on supposera dans toute cette sous-section que les fibres des arcs sont de type A : A_0 pour les arcs internes, A_{1j} pour les arcs de contour. Pour ces derniers, on note $s(e)$ le segment $[\lambda(e)\mu(e)]$, et $F(e)$ la métaface associée à la première composante de la fibre de e .

Configuration P_k . Pour les configurations de rayons unilocaux stables qui intersectent le polyèdre suivant un point, les seules contraintes portent sur le type des fibres des arcs incidents : elles doivent être de type A. On note P_k cette configuration où $|k|$ est le nombre d'arcs de contour incidents avec $k > 0$ si on observe une jonction, $k < 0$ est négatif si on observe un trou. La configuration P_0 s'étend au cas où la direction du rayon appartient à une face du GSI. La figure 18 illustre une configuration P_8 : seules les faces contenant le sommet intersection ont été représentées. On remarque qu'elles forment bien un disque topologique (les côtés extérieurs des faces sont en gris clair). Les contacts de tangence sont représentés en gras (situés sur des « plis du disque topologique »).

Eventails. On appelle *éventail* d'un rayon (p, \vec{u}) soit un arc du GSI séparant un secteur $++$ et un secteur $--$, soit un ensemble d'arcs du GSI délimitant un ensemble de secteur $+-$ consécutifs (cf figure 16). On ordonne les arêtes $\{e_1, \dots, e_l\}$ d'un éventail de telle sorte que $\lambda(e_i) \leq \lambda(e_{i+1})$ pour tout i (cf lemme 6).

La *bordure* de E est l'union des $s(e_i)$ pour $i = 1 \dots l$. Puisque $\lambda(e_{i+1}) = \nu(e_i)$ et les fibres des arcs sont de type A, la bordure de E est connexe. Toute configuration de rayon possède soit un seul éventail, soit un nombre pair non nul car tout secteur $--$ est couplé à un secteur $++$.

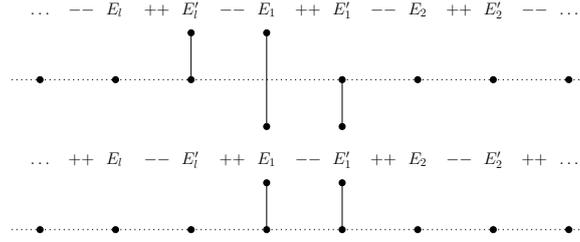


FIG. 17 – Positions des bordures des éventails

Lemme 17. *Une configuration stable possédant un seul éventail maximal est en configuration P_k . Dans une configuration stable possédant au moins deux éventails maximaux, on a l'alternative suivante : soit la configuration est de type P_k , soit les positions des bordures des éventails se ramènent aux cas de la figure 17.*

Démonstration. Dans une configuration avec un seul éventail, les inégalités sur les $\lambda(e_i)$ sont cycliques donc la bordure de l'éventail est réduite à un point

Considérons une configuration avec au moins deux éventails. Si les bordures de tous les éventails sont réduites au même point, on obtient une configuration P_k comme précédemment. Sinon on se ramène aux cas de la figure 17 à cause des contraintes suivantes :

- il n'existe que deux faces adjacentes à une même arête,
- les bordures de deux éventails séparés par un secteur $++$ ont même premier point d'après le lemme 6,
- les bordures de deux éventails séparés par un secteur $--$ ont même dernier point car on ne peut pas avoir de fibre de type $B1j$.

□

Lemme 18. *Soient E et E' deux éventails de (p, \vec{u}) disjoints, d'orientations opposées et dont les rims sont égaux à un même segment s préfixe de la composante d'intersection du rayon (p, \vec{u}) . Si le rayon (p, \vec{u}) n'appartient pas à \mathcal{C}_I alors la propriété suivante \mathcal{H} est vérifiée : il existe un unique arc e dans E et e' dans E' tels que $s(e) = s(e') = s$ et tels que les métafaces $F(e)$ et $F(e')$ sont en position convexe.*

Démonstration. On considère un rayon qui n'est pas dans \mathcal{C}_I .

Fait 1 : Deux arcs d'éventails distincts dont les métafaces associées sont des segments, forment un secteur $++$ d'angle $\leq \pi$. Il suffit de le montrer pour les deux telles métafaces les plus éloignées de p . Si ces dernières sont en position concave, le rayon appartient alors à une zone Q^\sim , absurde.

Fait 2 : Il n'existe aucun arête e des deux éventails tel que $s(e)$ est un segment non préfixe de s . Supposons le contraire, on considère alors e' dans l'autre éventail tel que $s(e')$ est un segment vérifiant $\mu(e') = \lambda(e)$. D'après le fait 1, le plan contenant s et l'arête de $F(e)$ incidente en $\lambda(e)$ non contenue dans s est de type $T++T$ et le rayon appartient à une zone $\overline{T++T}$, absurde.

Les deux faits précédents prouvent le lemme. □

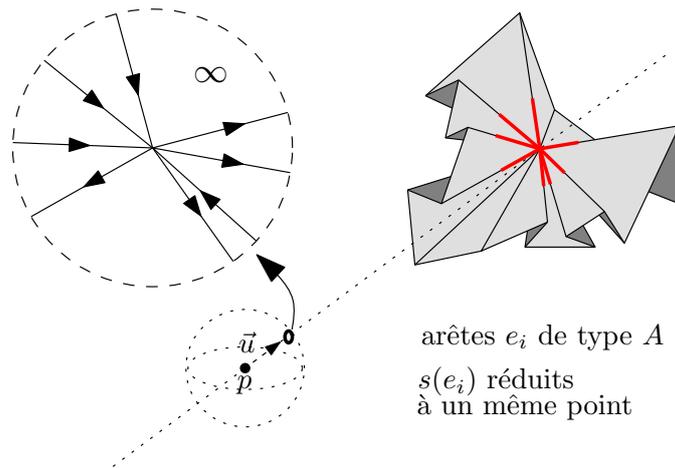


FIG. 18 – Configuration P_k

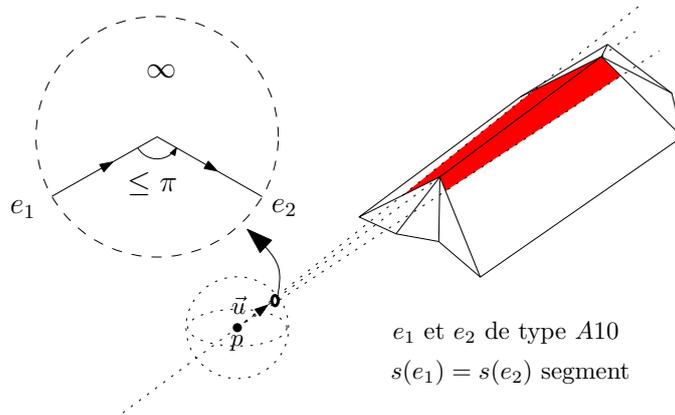


FIG. 19 – Configuration T

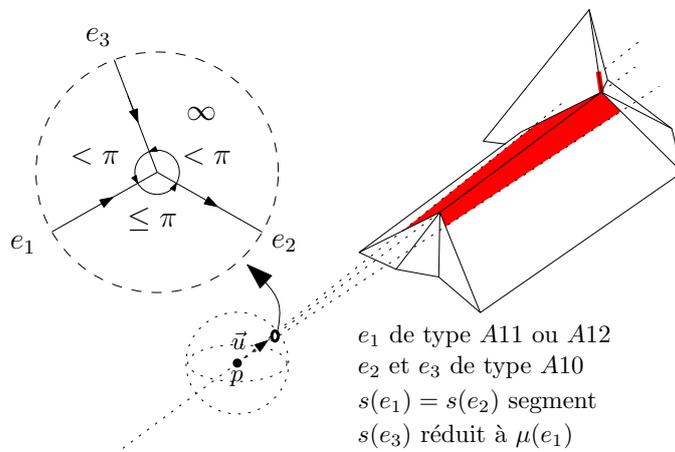
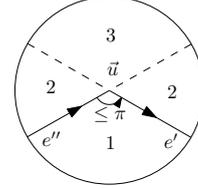


FIG. 20 – Configuration J_3

Configurations T et J_3 . On cherche ici des contraintes sur les configurations de rayons unilocaux stables qui intersectent le polyèdre suivant un segment. On exclut alors les configurations P_k et d'après le lemme 17, on se ramène aux cas de la figure 17.

On note $\{e_0, \dots, e_l\}$ et $\{e'_0, \dots, e'_l\}$ les deux éventails E_1 et E'_1 . On construit le sous-éventail $E''_1 = \{e_0, \dots, e_{l''}\}$ de E_1 tel que $\lambda(e_{l''}) < \mu(e_{l''}) = \mu(e'_l)$. Les éventails E''_1 et E'_1 vérifient donc la condition \mathcal{H} énoncée au lemme 18 : notons $e'' \in E''_1$ et $e' \in E'_1$ les deux uniques arcs de cette condition. Dans le GSI, ils définissent trois domaines :

- dans le domaine 1, on n'y trouve aucun arc sinon le rayon est en configuration $Q^{-\circ}$ donc instable ;
- dans le domaine 2, on n'y trouve aucun arc sinon le rayon est en configuration $\overline{T++T}$;
- dans le domaine 3, on y trouve au plus une arête sinon le rayon est en configuration Q^{F} .



Ainsi la configuration possède au plus deux éventails, sinon il existe un choix de deux arcs dans deux autres éventails distincts qui induisent une instabilité $\overline{T++T}$ ou Q^{F} .

Finalement, puisque le rayon n'est pas dans une zone Q^{\ominus} , il est donc en configuration T (cf figure 19) avec deux arcs incidents à \vec{u} , ou en configuration J_3 (cf figure 20) avec trois arcs incidents à \vec{u} .

6.3 Stabilité des configurations obtenues

On justifie dans cette sous-section que les configurations P_k , T et J_3 sont stables. Pour montrer la stabilité d'un rayon (p, \vec{u}) , l'idée de la preuve est la suivante :

1. d'abord, on se place dans les voisinage β de p et D de \vec{u} fournis par le lemme 3 afin de ne pas prendre en compte les faces qui n'intersectent pas $[p\vec{u})$;
2. puis on détermine le lieu des contacts de tangence sur \mathcal{P} selon la position de q par rapport aux plans $\langle C(p, e) \rangle$, e arc incident à \vec{u} (on ne justifie pas le fait qu'on doit restreindre β pour observer seulement les éléments remarquables des fibres) ;
3. enfin on observe que le type d'homéomorphisme du contour apparent local reste inchangé et on justifie que ce contour évolue continûment.

Lemme 19. *Un rayon unilocal en configuration T est stable.*

Démonstration. Voir la figure 21. □

Lemme 20. *Un rayon unilocal en configuration P_k est stable.*

Démonstration. Soit e un arc incident au rayon (p, \vec{u}) . Sa fibre est de type A . On notera $l'_1(e)$ le segment lieu des derniers points rencontrés dans la première composante. Donnons une idée de ce qui se passe. Pour q suffisamment proche de p ,

- les arcs internes le restent (en restant au-dessus de $\langle f_1(e) \rangle$ et $\langle f_2(e) \rangle$), le raisonnement est analogue pour les secondes composantes des fibres de type $A11$ et $A12$) : on conclut immédiatement que la configuration P_0 est stable ;

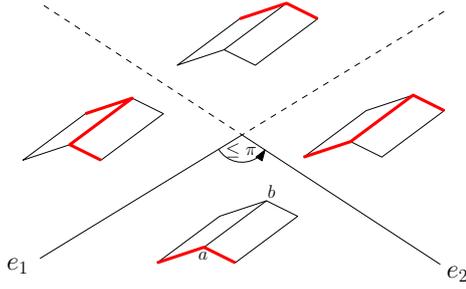


FIG. 21 – Lieu des contacts de tangence pour une configuration T

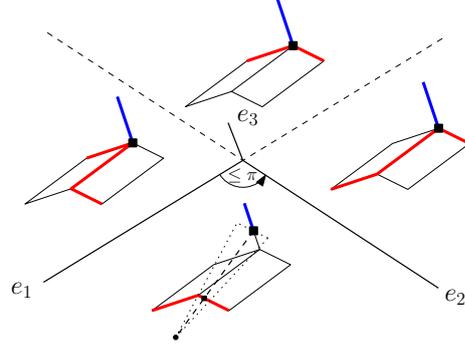


FIG. 22 – Lieu des contacts de tangence pour une configuration J_3

- q n'appartient à aucune zone $T++T$ entre un segment $l_1(e)$ (ou $l'_1(e)$) et $l_1(e')$ (ou $l'_1(e')$) pour deux arcs de contour distincts.

Essentiellement les contours observés depuis p proviennent des fibres des arcs de contour et aucune ne fait occlusion à une autre.

Chacune de ses fibres se comportent comme une configuration de type T pour leur première composante. La portion de contour qu'elles produisent est la projection de $l_1(e)$ ou $l'_1(e)$ suivant la position de q par rapport à $\langle C(p, e) \rangle$. Ces arcs sont concourants en \vec{u} car les $l_1(e)$ sont concourants en le sommet intersection : le degré du branchement est préservé. Enfin on observe que le type de branchement, trou ou jonction, est préservé. \square

Lemme 21. *Un rayon unilocal en configuration J_3 est stable.*

Démonstration. Voir la figure 22. \square

Remarque. Si la métaface $F(e_3)$ se situait sous $F(e_1)$ (ou sous $F(e_2)$), la configuration serait instable car p appartiendrait à une zone $\overline{T++T}$ formée par $[\lambda(e_1)\mu(e_1)]$ et $l_1(e_3)$. Pour détecter cette instabilité, il ne suffit pas de déplacer le point de vue le long d'un segment depuis p , il faut traverser le plan de bitangence contenant p pour observer un saut de la jonction.

7 Conclusion

On a distingué deux grands groupes d'instabilités unilocales : les unes intrinsèques résultant de deux faces en position concave, faciles à étudier ; les autres structurelles résultant de configurations moins naturelles. A ce stade, il reste à poursuivre le catalogue des rayons instables. Mis à part les zones de tritangence et de bitangence dans un plan bitangent, les autres instabilités multilocales semblent être des prolongements des zones d'instabilités unilocales. La principale difficulté de cette étude est la possible combinaison d'instabilités sur un même rayon stable.

La stabilité du contour apparent d'un polyèdre par isotopie a fourni un cadre agréable d'étude. Tant la preuve du théorème de passage local/global que l'étude de la stabilité des rayons, n'utilise de gros outils mathématiques. Cette stabilité permet également de proposer un raffinement du graphe d'aspect d'un polyèdre pour l'homéomorphisme.

Approximer l'aire, le volume, la courbure,... d'un objet à partir de reconstructions quelconques est un problème difficile. Il en est de même pour le graphe d'aspect. Toutefois, tout porte à croire qu'il existe de bonnes conditions sur le maillage d'un objet lisse pour exclure les instabilités unilocales structurelles. Il serait alors intéressant de caractériser les instabilités dans ce cadre afin d'étudier le problème de reconstruction de surfaces d'événements visuels d'un objet lisse.

En calcul de radiosité, une approche classique consiste à construire un maillage de discontinuité de la scène : il est contraint par les surfaces d'événements visuels traduisant des discontinuités de l'éclairage. Les travaux de Gigus et Malik [2] capturent un énorme sur-ensemble de ces événements visuels qui empêche le passage à l'échelle. La stabilité par isotopie permet d'ignorer des instabilités inobservables qui résultent d'artefacts de la discrétisation de l'objet mais elle ne capture pas les événements visuels dus à de grandes portions (quasiment) planes des objets. Une extension de ce cadre d'étude permettrait de trouver un juste milieu prometteur pour le calcul de maillage de discontinuité de grandes scènes polyédriques.

Références

- [1] Julien Demouth. *Événements visuels de convexes et limites d'ombres*. PhD thesis, Université Nancy 2, 2008.
- [2] Ziv Gigus and Jitendra Malik. Computing the aspect graph for line drawings of polyhedral objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(2) :113–122, Feb 1990.
- [3] J. J. Koenderink and A. J. van Doorn. The internal representation of solid shape with respect to vision. *Biological Cybernetics*, 32 :211–216, 1979.
- [4] J. N. Mather. Stability of C^∞ mappings. ii. infinitesimal stability implies stability. *Annals of Mathematics*, 89 :254–291, 1969.
- [5] S. Petitjean, J.H. Rieger, and D. Forsyth. Recognizing algebraic surfaces from aspects. Manuscrit.
- [6] J.H. Rieger. On the classification of views of piecewise-smooth objects. *Image and Vision Computing*, 5 :91–97, 1987.
- [7] H. Whitney. On singularities of mappings of euclidean spaces. i. mappings of the plane into the plane. *Annals of Mathematics*, 62 :374–410, 1955.

A Preuve du théorème 1

Lemme 22. *Soient U et V des espaces topologiques, E un espace métrique, K un compact de V et $\psi : U \times K \rightarrow E$ continue. Alors l'application $\psi_K : U \rightarrow \mathcal{K}(E)$ (muni de la topologie de Hausdorff) définie par $\psi_K(u) = \psi(u, K)$ est continue.*

Rappel : $d_{\bar{H}}(A, B) = \min\{\epsilon \mid A \subseteq B^\epsilon\}$ et $d_H(A, B) = \max\{d_{\bar{H}}(A, B), d_{\bar{H}}(B, A)\}$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que ψ_K n'est pas continue, ie il existe $\epsilon > 0$, $u_n \rightarrow u$ dans U tel que pour tout n , $d_H(\psi_K(u_n), \psi_K(u)) > \epsilon$. Quitte à restreindre la suite (u_n) , on peut supposer les deux cas qui vont suivre.

1er cas : pour tout n , $d_{\bar{H}}(\psi_K(u_n), \psi_K(u)) > \epsilon$. Ainsi pour tout n , il existe $k_n \in K$ tel que $d(\psi(u_n, k_n), \psi(u, K)) > \epsilon$. Quitte à extraire, on peut supposer $k_n \rightarrow k$ dans k . La dernière inégalité contredit la continuité de ψ en (u, k) .

2nd cas : pour tout n , $d_{\bar{H}}(\psi_K(u), \psi_K(u_n)) > \epsilon$. Ainsi pour tout n , il existe k_n dans K tel que $d(\psi(u, k_n), \psi(u_n, K)) > \epsilon$. En particulier $d(\psi(u, k_n), \psi(u_n, k_n)) > \epsilon$ pour tout n . Quitte à extraire, on peut supposer $k_n \rightarrow k$. Ainsi le terme de gauche de la dernière inégalité converge vers 0 par continuité de ψ et d , absurde. \square

Corollaire 23. *Soit p un point isotopiquement stable. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage β de p tel que pour tout q dans β , $\bar{\Delta}_q$ est inclus dans le voisinage ϵ -tubulaire de $\bar{\Delta}_p$.*

A.1 Du global au local

Lemme 24. *Si un point de vue p est isotopiquement stable, alors tous les rayons issus de p sont stables.*

Démonstration. Soient p isotopiquement stable et $\psi : \beta_0 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ une isotopie correspondante.

Soit $\vec{u} \notin \bar{\Delta}_p$ à distance $3\epsilon > 0$ de $\bar{\Delta}_p$. Le corollaire 23 avec ϵ fournit un voisinage β de p tel que $\Delta_q \cap B(\vec{u}, \epsilon)$ est vide pour tout q dans β donc le rayon (p, \vec{u}) est stable.

Considérons \mathcal{B} l'ensemble fini des points de branchement de $\bar{\Delta}_p$. Il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que les boules ouvertes $B(\vec{u}, \epsilon_1)$ pour $\vec{u} \in \mathcal{B}$ sont deux à deux à distance strictement positive.

Notons $\bar{\Delta}_p^\epsilon$ le voisinage ϵ -tubulaire de $\bar{\Delta}_p$. Il existe $0 < \epsilon' \leq \epsilon_1$ tel que pour tout $0 < \epsilon \leq \epsilon'$, $\bar{\Delta}_p^\epsilon \setminus \cup_{\vec{u} \in \mathcal{B}} \bar{B}(\vec{u}, \epsilon_1)$ possède autant de composantes connexes que d'arêtes dans le graphe de Δ_p . Notons β_ϵ le voisinage de p fournit par le lemme 22 avec ϵ .

On appelle *tube* une telle composante connexe et *extrémité* une bordure du tube commune à celle d'une boule $B(\vec{u}, \epsilon_1)$. On étiquette le tube par l'étiquette de l'unique morceau d'arête de Δ_p qu'il contient. Soit e_i une arête de Δ_p d'extrémités \vec{u}_1 et \vec{u}_2 . Pour tout q , $\psi(q, e_i)$ est une courbe simple joignant $\psi(q, \vec{u}_1)$ à $\psi(q, \vec{u}_2)$ incluse dans e_i^ϵ (lemme 22).

Soit \vec{u} appartenant à une arête e_i ouverte de Δ_p . Quitte à choisir ϵ_1 et ϵ_2 suffisamment petits, on peut supposer que $B(\vec{u}, \epsilon_2)$ est inclus dans le tube i . On reparamétrise e par $[0, 1]$. On illustre cette situation dans le plan à la

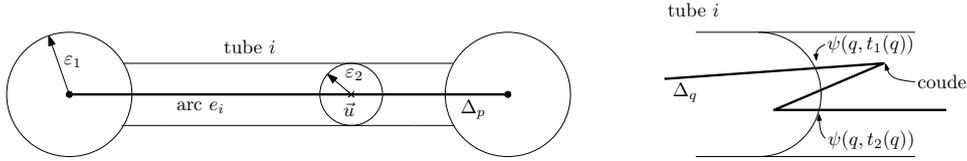


FIG. 23 –

figure 23. Il existe un demi-cercle C bord de $B(\vec{u}, \varepsilon_2)$ qui disconnecte le tube. Par le théorème de Jordan, la courbe simple $\psi(q, e_i)$ traverse C . On note $t_1(q)$ (resp $t_2(q)$) le premier instant (resp dernier) dans $[0, 1]$ où la courbe intersecte C . L'ensemble des instants d'intersection est discret car d'après le corollaire 5, la courbe est une chaîne polygonale. Supposons qu'il existe $q_n \rightarrow p$ tel que $t_1(q_n) < t_2(q_n)$. Par continuité de ψ , $\lim t_1(q_n) = \lim t_2(q_n) = t_1(p) = t_2(p)$. Soit r_n un coude entre les instants $t_1(q_n)$ et $t_2(q_n)$ (largement). Quitte à extraire, on peut supposer que r_n est la projection d'un même point du polyèdre. Il existe un voisinage de p tel que cette projection se trouve dans une petite boule centrée en $\psi(p, t_1(p))$ à distance strictement positive de \vec{u} . On peut choisir ε_2 suffisamment petit pour que ce phénomène ne se reproduise plus pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ par finitude du polyèdre. Ainsi pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_2$, il existe un voisinage de p (inclus dans β_ε tel que le contour local depuis q dans $B(\vec{u}, \varepsilon)$ est régulier.

Il ne reste plus qu'à traiter $\vec{u} \in \mathcal{B}$ point de branchement. Puisque l'homéomorphisme entre Δ_p et Δ_q conserve le nombre de points de branchement, les $\psi(q, \vec{u})$ pour $\vec{u} \in \mathcal{B}$ sont exactement les points branchements de Δ_q , isolés deux à deux par les boules $B(\vec{u}, \varepsilon_1)$, pour tout $q \in \beta_\varepsilon$. Un même raisonnement que ci-dessus montre que, quitte à choisir ε_1 suffisamment petit, chaque extrémité d'un tube i est intersecté une seule fois par Δ_p et il l'est par une arête $\psi(q, e_i)$. Ainsi dans $B(\vec{u}, \varepsilon_1)$, on a un point de branchement $\psi(q, \vec{u})$, k points qui se déplacent continûment sur le bord et dans des zones compactes deux à deux disjointes (k est le degré du point $\psi(p, \vec{u})$) et pour chacun de ses points, une courbe simple qui joint $\psi(q, \vec{u})$ dans la boule. De plus ces courbes ne s'intersectent pas entre elles avant d'atteindre $\psi(q, \vec{u})$ car ce dernier est le seul point de branchement dans la boule. Ainsi pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, il existe un voisinage de p tel que le contour local depuis q dans $B(\vec{u}, \varepsilon)$ est un branchement de degré k , qui préserve l'ordre circulaire des faces autour de ce point. La nature du branchement (jonction ou trou) est préservée par homéomorphisme. \square

A.2 Du local au global

Lemme 25. *Si tous les rayons issus d'un point de vue sont stables, alors ce point de vue est stable.*

Démonstration. Soit p un point de vue tel que tous les rayons issus de p sont stables. Pour tout \vec{u} , on note $D_{\vec{u}}$ un voisinage de \vec{u} vérifiant la propriété de stabilité de (p, \vec{u}) , $\beta_{\vec{u}}$ un voisinage de p associé et $\psi_{\vec{u}}$ l'application continue correspondante.

1. *Un recouvrement particulier de Δ_p par des ouverts canoniques.* La famille des $D_{\vec{u}}$ pour $\vec{u} \in \overline{\Delta_p} = K$ (théorème du choix) est un recouvre-

ment du compact K par des ouverts donc il en existe un sous-recouvrement fini $\{D_{\vec{u}}\}_{\vec{u} \in F}$. Tout voisinage canonique d'une vue locale de type régulier peut être choisi à distance strictement positive de l'ensemble S des directions de jonctions et de trous de Δ_p . F contient nécessairement S et on peut supposer que les $D_{\vec{u}}$ pour $\vec{u} \in S$ sont deux à deux disjoints. Maintenant soit $R = \Delta_p \setminus \cup_{\vec{u} \in S} D_{\vec{u}}$, union disjointe finie d'arcs fermés de Jordan (compacts). Soit η la "distance" minimale entre deux points de R appartenant à des arcs distincts. Pour tout $\vec{u} \in R$, on peut supposer que $D_{\vec{u}}$ est de rayon strictement inférieur à $\eta/2$. Dans le recouvrement $\{D_{\vec{u}}\}_{\vec{u} \in F \setminus S}$, on peut alors supposer qu'un ouvert n'intersecte que ses deux ouverts voisins, que $\vec{u} \in F \setminus S$ n'est contenu que dans $D_{\vec{u}}$ et que pour toute composante connexe c de R , le cardinal de $F \cap c$ est impair. On note \mathcal{D} l'union des $D_{\vec{u}}$ pour $\vec{u} \in F$.

2. *Stabilité du contour dans le recouvrement.* On montre qu'il existe un voisinage β de p tel que pour tout $q \in \beta$, Δ_q est inclus dans \mathcal{D} . La famille des $D_{\vec{u}}$ pour $\vec{u} \notin \mathcal{D}$ (axiome du choix) est un recouvrement du compact $\mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{D}$ par des ouverts donc il en existe un sous-recouvrement fini $\{D_{\vec{u}}\}_{\vec{u} \in F'}$. On pose β l'intersection finie des ouverts $\beta_{\vec{u}}$ de p pour $\vec{u} \in F \cup F'$.

3. *Recollement pour trois boules.* Soient $\vec{u}_1 \in F \setminus S$ et $\vec{u}_2 \in F$ voisins. On va construire une application continue $\tilde{\psi}_{\vec{u}_1} : \beta \times \Delta_p \cap \bar{D}_{\vec{u}_1} \rightarrow \mathbb{S}^2$ telle que pour tout $q \in \beta$, $\tilde{\psi}_{\vec{u}_1}(q, \cdot)$ réalise un homéomorphisme de $\Delta_p \cap \bar{D}_{\vec{u}_1}$ sur $\Delta_q \cap \bar{D}_{\vec{u}_2}$ et telle que $\tilde{\psi}_{\vec{u}_1}(q, \vec{v}) = \psi_{\vec{u}_2}(q, \vec{v})$ où \vec{v} est l'unique point de Δ_p sur $D_{\vec{u}_1} \cap \partial D_{\vec{u}_2}$ (par construction du recouvrement de Δ_p). En utilisant la continuité de $\psi_{\vec{u}_2}$ sur le bord de $D_{\vec{u}_2}$, et par construction du recouvrement de Δ_p , on montre que pour tout $q \in \beta$ suffisamment petit, $\Delta_q \cap D_{\vec{u}_1} \cap \partial D_{\vec{u}_2}$ est réduit à un point $f(q) = \psi_{\vec{u}_2}(q, \vec{v})$ qui varie continûment en q . Soit $\theta :]0, 1[\rightarrow \Delta_p \cap \bar{D}_{\vec{u}_1}$ un homéomorphisme et notons $t(q)$ l'unique paramètre de $]0, 1[$ tel que $\tilde{\psi}_{\vec{u}_1}(q, \theta(t(q))) = f(q)$. L'application $t : \beta \rightarrow]0, 1[$ est continue. On considère la reparamétrisation suivante :

$$\lambda(q, t) = \begin{cases} \frac{\theta^{-1}(\vec{v})}{t(q)} t & 0 \leq t \leq t(q) \\ \frac{1 - \theta^{-1}(\vec{v})}{1 - t(q)} (t - 1) + 1 & t(q) < t \leq 1 \end{cases} .$$

Pour tout $q \in \beta$, l'application $\lambda(q, \cdot)$ est un homéomorphisme de $[0, 1]$ sur lui-même. On construit alors l'application $\tilde{\psi}_{\vec{u}_1}(q, \vec{u}) = \psi_{\vec{u}_1}(q, \theta \circ \lambda(q, \cdot)^{-1} \circ \theta^{-1}(\vec{u}))$ vérifiant les conditions souhaitées.

Si $\vec{u}_3 \in F$ est un deuxième voisin de $D_{\vec{u}_1}$, on peut construire $\tilde{\psi}_{\vec{u}_1}$ avec les mêmes conditions de bord sur $D_{\vec{u}_1} \cap \partial D_{\vec{u}_3}$.

4. *Recollement global.* Par construction du recouvrement de Δ_p , on peut former la partition $F = F_1 \uplus F_2$ telle que F_1 contient S et telle que si $D_{\vec{u}_1}$ et $D_{\vec{u}_2}$ s'intersectent alors \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont dans des classes distinctes. Pour β voisinage de p suffisamment petit, on construit l'application continue $\psi : \beta \times \Delta_p \rightarrow \mathbb{S}^2$ définie par $\psi_{\vec{u}}$ sur $D_{\vec{u}}$ pour $\vec{u} \in F_1$ et par $\tilde{\psi}_{\vec{u}}$ sur $D_{\vec{u}} \setminus \cup_{\vec{v} \in F_1} D_{\vec{v}}$ pour $\vec{u} \in F_2$. Pour tout $q \in \beta$, $\psi(q, \cdot)$ réalise un homéomorphisme de Δ_p sur Δ_q .

5. *Extension en une isotopie ambiante.* Il s'agit d'adapter une technique usuelle d'analyse rédigée dans [1]. \square