

**Erreur en relation de comportement
pour les problèmes linéaires**

2.1	Introduction	19
2.2	Erreur en relation de comportement	20
2.2.1	Solution approchée admissible	20
2.2.2	Erreur en relation de comportement en linéaire	21
2.3	Utilisation pour les calculs éléments finis	22
2.3.1	Construction d'un couple admissible	22
2.3.2	Champ de déplacement	23
2.3.3	Champ de contrainte	23
2.3.4	Lien avec les erreurs en solution	24
2.3.5	Comportement asymptotique	25
2.4	Bibliographie du chapitre 2	26

2.1 Introduction

Le problème de référence est le problème linéaire décrit par les équations [(1.6) - (1.8)]. Il est discrétisé par la méthode des éléments finis en déplacement. Pour évaluer la qualité d'un calcul éléments finis, il faut :

- définir la notion d'erreur,
- définir des mesures de cette erreur.

La définition même de l'erreur est intimement liée à la définition de la notion de solution approchée.

Classiquement, dans le cadre des méthodes d'éléments finis en déplacement, le champ de déplacement joue un rôle privilégié et l'erreur est définie par :

$$\| \underline{e}_h = \underline{U}_{ex} - \underline{U}_h \quad (2.1)$$

On peut évidemment en déduire une erreur sur les contraintes :

$$\| \underline{\sigma}_{ex} - \underline{\sigma}_h = \mathbf{K}_g(\underline{e}_h) \quad (2.2)$$

Du point de vue mécanique, l'inconvenient majeur de cette démarche est de considérer comme approximation du couple exact $(\underline{U}_{ex}, \underline{\sigma}_{ex})$ un couple $(\underline{U}_h, \underline{\sigma}_h)$ dont la partie contrainte ne vérifie pas les équations d'équilibre, équations qui constituent pourtant un des fondements de l'édifice. Cette remarque est à la base de l'introduction de la notion d'erreur en relation de comportement présentée pour la première fois dans [LADEVEZE, 1975]. Cette notion repose sur un partitionnement des équations en deux groupes :

- les conditions d'admissibilité : les équations de liaison, les équations d'équilibre et les conditions initiales,
- la relation de comportement.

La relation de comportement a en effet un statut particulier ; dans la pratique, elle est souvent la moins fiable des équations. Aussi, il est naturel d'isoler cette équation et de faire en sorte qu'une solution approchée déplacement - contrainte sur l'intervalle de temps étudié vérifie exactement le groupe d'équations le plus fiable, c'est-à-dire les conditions d'admissibilité.

Ainsi, la qualité de l'approximation peut être appréciée par la façon dont cette relation de comportement est vérifiée. Pour quantifier cette erreur, des normes de type énergétique ou autre, qui ont des bases physiques fortes, sont utilisées. La difficulté, qui est un obstacle a priori, est d'élaborer des solutions approchées admissibles c'est-à-dire vérifiant exactement les conditions d'admissibilité car les approximations usuelles, notamment celles issues de la méthode des éléments finis, ne vérifient pas ces conditions puisque la contrainte $\underline{\sigma}_h$ n'est pas en équilibre avec les charges données.

Pour la méthode des éléments finis, la technique proposée initialement dans [LADEVEZE, 1975, 1977] et développée et améliorée depuis, permet de s'affranchir de cette difficulté. Pour les problèmes linéaires, on peut consulter notamment les références [LADEVEZE - LEGUILLON, 1983], [LADEVEZE - PELLE - ROUGEOT, 1991], [LADEVEZE - ROUGEOT, 1997]. Plusieurs articles de synthèse ont présenté l'état d'avancement de la démarche [LADEVEZE, 1990, 1992], [PELLE, 1995]. On pourra aussi consulter [LADEVEZE - PELLE, 2001].

2.2 Erreur en relation de comportement

2.2.1 Solution approchée admissible

Une solution *approchée admissible* du problème de référence est, par définition, un couple déplacement-contrainte $(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\sigma}})$ admissible, c'est-à-dire un couple tel que :

- $\hat{\underline{U}}$ est cinématiquement admissible

$$\left\| \begin{array}{l} \hat{\underline{U}} \in \mathbf{U} \text{ et } \hat{\underline{U}}|_{\partial_1\Omega} = \underline{U}_d \end{array} \right. \quad (2.3)$$

- $\hat{\underline{\sigma}}$ est statiquement admissible

$$\left\| \begin{array}{l} \hat{\underline{\sigma}} \in \mathbf{S} \text{ et } \forall \underline{U}^* \in \mathbf{U}_0 \\ \int_{\Omega} \text{Tr}[\hat{\underline{\sigma}} \mathcal{E}(\underline{U}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^* dS \end{array} \right. \quad (2.4)$$

2.2.2 Erreur en relation de comportement en linéaire

Soit $(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\sigma}})$ un couple admissible. S'il vérifie la relation de comportement :

$$\| \hat{\underline{\sigma}} - \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\hat{\underline{U}}) = 0$$

alors ce couple est la solution exacte du problème de référence :

$$\| \hat{\underline{U}} = \underline{U}_{ex} \text{ et } \hat{\underline{\sigma}} = \underline{\sigma}_{ex}$$

Si ce couple ne vérifie pas la relation de comportement :

$$\| \hat{\underline{\sigma}} - \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\hat{\underline{U}}) \neq 0$$

alors $(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\sigma}})$ est une approximation de $(\underline{U}_{ex}, \underline{\sigma}_{ex})$ et la façon dont $(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\sigma}})$ vérifie la relation de comportement permet d'en apprécier la qualité.

On est ainsi conduit à introduire la définition suivante :

Définition

On appelle *erreur en relation de comportement associée au couple admissible $(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\sigma}})$* la quantité définie en chaque point de Ω par :

$$\| \mathcal{E}_{RdC} = \hat{\underline{\sigma}} - \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\hat{\underline{U}}) \quad (2.5)$$

L'erreur en relation de comportement \mathcal{E}_{RdC} est donc une grandeur de type contrainte.

Cette démarche présente quelques avantages :

- le premier est de faire porter le doute sur la relation de comportement c'est-à-dire sur celle des équations du problème de référence qui est la moins fiable ;
- le deuxième est que l'expression de \mathcal{E}_{RdC} ne fait pas intervenir la solution exacte du problème de référence contrairement aux erreurs classiques du type \underline{e}_h : pour calculer l'erreur en relation de comportement, il n'est donc pas nécessaire de connaître la solution exacte du problème (la seule connaissance de la solution approchée suffit !)
- dans le cadre linéaire, des mesures d'erreurs s'imposent naturellement.

Par contre, la mise en œuvre de cette démarche nécessite la connaissance d'un couple déplacement-contrainte admissible. A partir de la solution du modèle approché, qui n'est généralement pas un couple admissible, il est donc nécessaire, pour évaluer les erreurs en relation de comportement, de reconstruire, en post-traitement, un couple admissible ce qui pose, comme nous le verrons, quelques réelles difficultés techniques.

■ Mesures associées

Classiquement, on mesure l'erreur en relation de comportement en utilisant la norme en énergie sur la structure considérée. On définit ainsi l'erreur absolue globale par :

$$\| \mathbf{e}_{RdC}(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\sigma}}) = \| \hat{\underline{\sigma}} - \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\hat{\underline{U}}) \|_{\sigma, \Omega} \quad (2.6)$$

avec :

$$\| \cdot \|_{\sigma, \Omega} = \left[\int_{\Omega} \text{Tr}(\cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot) d\Omega \right]^{1/2} \quad (2.7)$$

S'il n'y a pas de risques de confusion, on écrira simplement \mathbf{e}_{RdC} pour $\mathbf{e}_{RdC}(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\sigma}})$.

A cette erreur absolue globale on associe l'erreur relative :

$$\left\| \varepsilon = \frac{\left\| \hat{\sigma} - \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\hat{U}) \right\|_{\sigma, \Omega}}{\left\| \hat{\sigma} + \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\hat{U}) \right\|_{\sigma, \Omega}} \right\| \quad (2.8)$$

ε est ainsi une précision globale qui permet d'estimer la qualité globale de l'approximation $(\hat{U}, \hat{\sigma})$.

Il est également facile de définir la contribution à la précision globale d'une partie E de la structure Ω (en pratique E sera un élément quelconque du maillage) par :

$$\left\| \varepsilon_E = \frac{\left\| \hat{\sigma} - \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\hat{U}) \right\|_{\sigma, E}}{\left\| \hat{\sigma} + \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\hat{U}) \right\|_{\sigma, \Omega}} \right\| \quad (2.9)$$

avec :

$$\left\| \left\| \cdot \right\|_{\sigma, E} = \left[\int_E Tr(\cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot) dE \right]^{1/2} \right\| \quad (2.10)$$

Ces contributions locales ε_E permettent de localiser les erreurs de discrétisation.

De (2.8) et (2.9), il résulte :

$$\left\| \varepsilon^2 = \sum_E \varepsilon_E^2 \right\| \quad (2.11)$$

Remarque

L'erreur en relation de comportement et, plus précisément, la norme en énergie de cette erreur est un outil très commode pour introduire les classiques théorèmes de l'énergie potentielle et de l'énergie complémentaire.

2.3 Utilisation pour les calculs éléments finis

2.3.1 Construction d'un couple admissible

Le calcul de l'erreur en relation de comportement ne peut se faire directement sur le couple $(\underline{U}_h, \sigma_h)$ car il n'est pas admissible. La méthode consiste à effectuer un post-traitement de la solution éléments finis de façon à construire, à partir :

- des données du problème de référence
- de la solution éléments finis $(\underline{U}_h, \sigma_h)$

un couple déplacement-contrainte $(\hat{U}_h, \hat{\sigma}_h)$ admissible au sens des définitions [(2.3) - (2.4)].

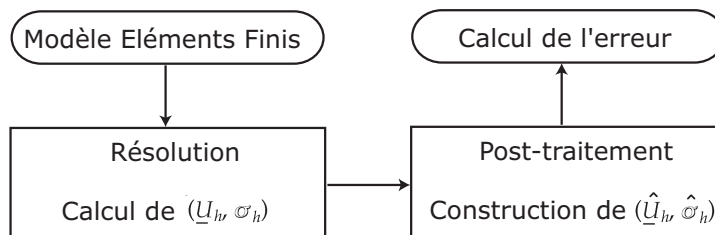


Figure 2-1 : Principe d'utilisation

Du point de vue technique, il s'agit là d'un point capital de la méthode. En effet, d'une part, la qualité du couple $(\hat{U}_h, \hat{\sigma}_h)$ construit conditionne la qualité de la mesure d'erreur et, d'autre part, le coût numérique de cette construction doit être faible comparé à celui de l'analyse éléments finis.

2.3.2 Champ de déplacement

Dans le cadre des méthodes d'éléments finis en déplacement de type conforme, le champ de déplacement \underline{U}_h est admissible.

Par simplicité, on choisit donc généralement :

$$\| \hat{U}_h = \underline{U}_h \quad (2.12)$$

2.3.3 Champ de contrainte

Par contre, le champ de contrainte σ_h calculé par éléments finis n'est pas statiquement admissible. Il est donc nécessaire de reconstruire un champ $\hat{\sigma}_h$ qui vérifie les équations d'équilibre. La méthode présentée ci-dessous a été introduite dans [LADEVEZE, 1975, 1977]. Elle est bâtie sur des conditions de prolongement fortes.

■ Condition de prolongement forte

L'idée de base consiste à rechercher le champ $\hat{\sigma}_h$ comme un prolongement (ou une extension) de la solution éléments finis au sens suivant :

$$\| \begin{array}{l} \text{Pour toute fonction de base } \varphi_i \text{ de type éléments finis} \\ \text{et pour tout élément } E \text{ du maillage :} \\ \int_E (\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \underline{\text{grad}} \varphi_i dE = 0 \end{array} \quad (2.13)$$

Remarque

La condition de prolongement (2.13) a un fort contenu mécanique. Elle impose au champ de contrainte $\hat{\sigma}_h$ que l'on cherche d'avoir, sur tout élément et pour tout champ de déplacement de type éléments finis, le même travail que la contrainte éléments finis σ_h . En particulier, pour des triangle à 3 nœuds, elle impose l'égalité des contraintes moyennes sur chaque élément.

■ Notations

Sur le bord ∂E de chaque élément E , on définit une fonction η_E constante sur chaque face de E et valant +1 ou -1 de façon que, sur la face commune $\Gamma_{E_1 E_2}$ à deux éléments adjacents E_1 et E_2 :

$$\| \eta_{E_1} + \eta_{E_2} = 0$$

et on note \underline{n}_E la normale unité sur ∂E et extérieure à E .

■ Principes de la construction

La construction de champs de contrainte en équilibre est effectuée en deux étapes.

□ Etape I

Dans un premier temps, on construit sur les faces des éléments des densités d'effort \hat{F} .

Ces densités sont destinées à représenter les vecteurs contraintes sur les faces des éléments :

$$\| \hat{\sigma}_h|_E \underline{n}_E = \eta_E \hat{F} \text{ sur } \partial E \quad (2.14)$$

De cette façon, la continuité du vecteur contrainte dans la direction \underline{n}_E est automatiquement assurée à la traversée d'une interface.

Naturellement, sur les faces Γ incluses dans $\partial_2 \Omega$, on impose :

$$\| \eta_E \hat{F} = \underline{F}_d \quad (2.15)$$

Enfin, ces densités d'effort seront construites de façon que les densités $\eta_E \hat{F}$ soient en équilibre avec les charges intérieures données \underline{f}_d sur chaque élément E du maillage :

$$\| \begin{array}{l} \text{Pour tout champ de déplacement de solide } \underline{U}_S : \\ \int_E \underline{f}_d \cdot \underline{U}_S \, dE + \int_{\partial E} \eta_E \hat{F} \cdot \underline{U}_S \, dS = 0 \end{array} \quad (2.16)$$

□ **Étape 2**

Dans un deuxième temps, il "suffit" de construire une solution simple du problème local sur chaque élément E :

$$\| \begin{array}{l} \text{div } \hat{\sigma}_h + \underline{f}_d = 0 \text{ dans } E \\ \hat{\sigma}_h \underline{n}_E = \eta_E \hat{F} \text{ sur } \partial E \end{array} \quad (2.17)$$

Le détail de cette construction fera l'objet du prochain chapitre.

2.3.4 Lien avec les erreurs en solution

Dans le cadre des problèmes linéaires, il est facile de relier l'erreur en relation de comportement aux erreurs en solution classiquement utilisées :

- erreur en solution sur le déplacement : $\underline{e}_h = \underline{U}_{ex} - \underline{U}_h$
- erreur en solution sur la contrainte : $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\underline{e}_h) = \sigma_{ex} - \sigma_h$

Soit $\hat{\sigma}_h$ un champ de contrainte statiquement admissible. Le lien entre l'erreur en relation de comportement $\hat{\sigma}_h - \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\underline{U}_h)$ est donné par le théorème de l'hypercercle [PRAGER - SYNGE, 1947] :

Théorème

$$\| [\mathbf{e}_{RdC}(\underline{U}_h, \hat{\sigma}_h)]^2 = \| \sigma_{ex} - \hat{\sigma}_h \|_{\sigma, \Omega}^2 + \| \underline{U}_{ex} - \underline{U}_h \|_{u, \Omega}^2 \quad (2.18)$$

où :

$$\| \cdot \|_{u, \Omega}^2 = \int_{\Omega} \text{Tr}[\mathcal{E}(\cdot) \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\cdot)] \, d\Omega$$

Démonstration

On a :

$$\| \hat{\sigma}_h - \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\underline{U}_h) \|_{\sigma, \Omega}^2 = \| (\hat{\sigma}_h - \sigma_{ex}) + (\sigma_{ex} - \mathbf{K}_{\mathcal{E}}(\underline{U}_h)) \|_{\sigma, \Omega}^2 \\ = \| \hat{\sigma}_h - \sigma_{ex} \|_{\sigma, \Omega}^2 + \| \underline{e}_h \|_{u, \Omega}^2 + 2 \int_{\Omega} \text{Tr}[(\hat{\sigma}_h - \sigma_{ex}) \mathcal{E}(\underline{e}_h)] \, d\Omega$$

Le champ de déplacement \underline{e}_h , différence de deux champs CA, est un champ CA à zéro : $\underline{e}_h \in \mathbf{U}_0$. De même, le champ de contrainte $\hat{\sigma}_h - \sigma_{ex}$, différence de deux champs SA, est un champ SA à zéro. Il en résulte :

$$\left\| \int_{\Omega} Tr[(\hat{\sigma}_h - \sigma_{ex}) \mathcal{E}(\underline{e}_h)] d\Omega = 0 \right.$$

ce qui démontre le théorème (2.18).

Remarques

1. Le théorème de l'hypercercle n'est qu'une forme du théorème de PYTHAGORE dans l'espace des contraintes \mathbf{S} (Figure 2-2) muni du produit scalaire :

$$\left\| (\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \int_{\Omega} Tr[\sigma_1 \mathbf{K}^{-1} \sigma_2] d\Omega \right.$$

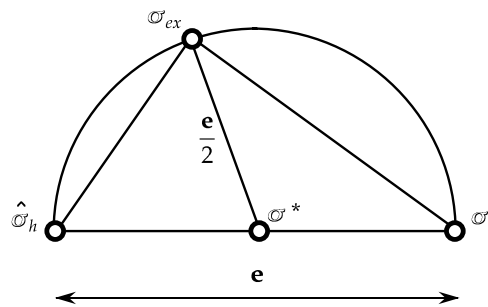


Figure 2-2 : Hypercercle de PRAGER-SYNGE

2. Si l'on introduit comme contrainte approchée la moyenne :

$$\left\| \sigma^* = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_h + \sigma_h) \right. \tag{2.19}$$

on obtient :

$$\left\| \mathbf{e}_{RdC} = \|\mathcal{E}_{RdC}\|_{\sigma,\Omega} = 2 \|\sigma_{ex} - \sigma^*\|_{\sigma,\Omega} \text{ et } \epsilon = \frac{\|\sigma_{ex} - \sigma^*\|_{\sigma,\Omega}}{\|\sigma^*\|_{\sigma,\Omega}} \right. \tag{2.20}$$

La mesure d'erreur en relation de comportement permet donc de calculer *exactement*, au sens de la norme en énergie, l'erreur entre σ_{ex} et σ^* sans connaître la solution exacte σ_{ex} .

2.3.5 Comportement asymptotique

Du théorème de l'hypercercle, il résulte en particulier les inégalités :

$$\left\| \|\sigma_{ex} - \sigma_h\|_{\sigma,\Omega} \leq \mathbf{e}_{RdC} \text{ et } \|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h\|_{u,\Omega} \leq \mathbf{e}_{RdC} \right. \tag{2.21}$$

La mesure d'erreur en relation de comportement est donc une mesure d'erreur fiable ; son indice d'efficacité est toujours supérieur à 1 :

$$\left\| \gamma \geq 1 \right.$$

D'autre part, on peut démontrer qu'il existe une constante C, indépendante de la taille des éléments telle que :

$$\left\| \mathbf{e}_{RdC} \leq C \|\underline{u}_{ex} - \underline{u}_h\|_{u,\Omega} \right.$$

En résumé, on a donc :

$$\| \| \underline{U}_{ex} - \underline{U}_h \|_{u,\Omega} \| \leq e_{RdC} \leq C \| \underline{U}_{ex} - \underline{U}_h \|_{u,\Omega} \quad (2.22)$$

2.4 Bibliographie du chapitre 2

LADEVEZE - LEGUILLON, 1983

"Error estimate procedure in finite element method and application", *SIAM J. Num. Anal.*, 20 (3), 485-509

LADEVEZE - PELLE - ROUGEOT, 1991

"Error estimation and mesh optimization for classical finite elements, *Engineering Computations*, 8, 69-80

LADEVEZE - ROUGEOT, 1997

"New advances on a posteriori error on constitutive relation in finite element analysis", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 150, 239-249

LADEVEZE, 1975

Comparaison de modèles de milieux continus, Thèse d'Etat, Université P et M. Curie, Paris (France)

LADEVEZE, 1977

"Nouvelles procédures d'estimation d'erreur relative à la méthode des éléments finis et applications", *Proc. Journées éléments finis*, Rennes (France)

LADEVEZE, 1990

"Modélisation et calculs des structures : de nouveaux défis", *La recherche Aérospatiale*, 5, 39-56

LADEVEZE, 1993

"Erreur en relation de comportement en dynamique : théorie et application au recalage de modèles", *Rapport interne n° 150*, LMT cachan

PELLE, 1995

"Sur la maîtrise des calculs Eléments Finis : état actuel et perspectives", *Proc. du 2^{ème} Colloque National en Calcul des Structures*, Giens (France), 43-54

PRAGER - SYNGE, 1947

"Approximation in elasticity based on the concept of functions spaces", *Quart. Appl. Math.*, 5, 261-269