

Cours d'option

**La méthode des éléments finis  
et  
le contrôle des calculs**

J.-P. Pelle

ENS - Cachan



## Préambule

Ce document, destiné exclusivement aux étudiants du DEA TACS, correspond au contenu du cours optionnel "La méthode des éléments finis et le contrôle des calculs". Une présentation plus complète peut être trouvée dans le livre "**La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire - Erreurs a posteriori et contrôle adaptatif des paramètres**" de Pierre Ladevèze et Jean-Pierre Pelle publié en 2001 aux éditions HERMES (ou dans sa traduction en anglais : Mastering calculations in linear and non linear mechanics, 2005, SPRINGER)

**Qualité d'une solution éléments finis**

---

---

1.1	Introduction	7
1.2	Modèle de référence	8
1.2.1	Elasticité linéaire	10
1.2.2	Problèmes quasi-statiques	10
1.3	Problème approché et erreurs de discrétisation	11
1.3.1	Problèmes linéaires	11
1.3.2	Problèmes non linéaires	13
1.4	Estimation des erreurs de discrétisation	15
1.4.1	Les estimations a priori	15
1.4.2	Les estimations a posteriori	15
1.4.3	Qualités d'un estimateur	16
1.5	Bibliographie du chapitre 1	17

---

---

## **I.1 Introduction**

A partir d'un problème physique, la démarche qui, conduit à effectuer un calcul éléments finis est généralement complexe. Entre le problème "réel" et le modèle de calcul par éléments finis, plusieurs étapes de modélisation sont effectuées (Figure 1-1).

Par exemple, pour dimensionner une structure mécanique, on utilise :

- une modélisation de la géométrie,
- une modélisation des charges (ou des différents cas de charges) utiles au dimensionnement,
- une modélisation des liaisons avec l'extérieur,
- une modélisation du type de comportement du matériau (ou des matériaux).

Suivant les choix faits pour ces différentes modélisations, on est conduit à différents *modèles mécaniques*. Les modèles mécaniques ainsi construits relèvent de la mécanique des milieux continus.

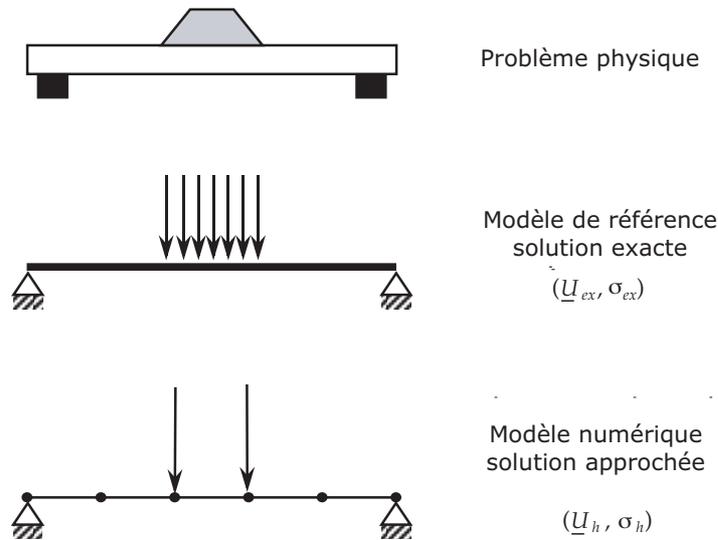


Figure 1-1 : Du problème physique au modèle numérique

Comme, excepté dans des situations très simples, il est impossible de déterminer explicitement la solution exacte  $(\underline{U}_{ex}, \underline{\sigma}_{ex})$  d'un tel modèle mécanique continu, l'utilisateur doit se contenter de déterminer des approximations de  $(\underline{U}_{ex}, \underline{\sigma}_{ex})$ . En pratique, cela revient à remplacer le modèle mécanique continu par un modèle approché plus simple dont on sait déterminer la solution, solution qui est considérée comme une approximation de  $(\underline{U}_{ex}, \underline{\sigma}_{ex})$ . La méthode des éléments finis consiste à remplacer le modèle mécanique continu par un modèle approché discret dont la solution  $(\underline{U}_h, \underline{\sigma}_h)$  constitue une approximation de  $(\underline{U}_{ex}, \underline{\sigma}_{ex})$ .

Le contrôle de la qualité du calcul éléments finis consiste à considérer le modèle mécanique continu comme modèle de référence et à évaluer la qualité de la solution calculée  $(\underline{U}_h, \underline{\sigma}_h)$  en tant qu'approximation de la solution exacte  $(\underline{U}_{ex}, \underline{\sigma}_{ex})$  de ce modèle de référence.

## 1.2 Modèle de référence

Le milieu étudié occupe à l'instant initial  $t=0$  un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . On se place en petites déformations et l'évolution du milieu est étudiée sur  $[0, T]$ .

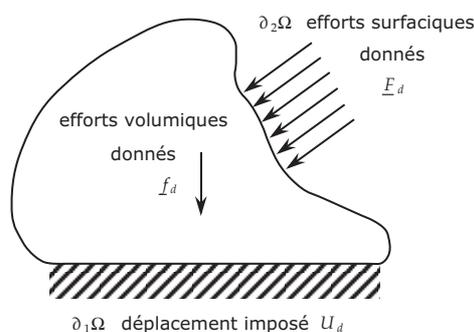


Figure 1-2 : Problème de référence

Le milieu est soumis à un environnement qui, à chaque instant  $t$ , est schématisé par (Figure 1-2) :

- un champ surfacique de déplacement  $\underline{U}_d$  sur une partie  $\partial_1\Omega$  de la frontière  $\partial\Omega$ ,
- une densité surfacique d'effort  $\underline{F}_d$  sur la partie :  $\partial_2\Omega = \partial\Omega - \partial_1\Omega$ ,
- une densité volumique d'effort  $\underline{f}_d$  sur le domaine  $\Omega$ .

A l'instant  $t=0$ , on donne la position  $\underline{U}_0$  et la vitesse initiale  $\underline{V}_0$  en tout point  $M$  de  $\Omega$  :

$$\left\| \begin{array}{l} \forall M \in \Omega \quad \underline{U}|_{t=0} = \underline{U}_0 \text{ et } \left(\frac{d}{dt}\underline{U}\right)|_{t=0} = \dot{\underline{U}}|_{t=0} = \underline{V}_0 \end{array} \right.$$

Le problème qui traduit l'évolution sur  $[0, T]$  du milieu peut être formulé de la façon suivante :

Trouver  $\underline{U}(M, t)$  et  $\underline{\sigma}(M, t)$  définis sur  $\Omega \times [0, T]$  tels que :

- équations de liaison et conditions initiales

$$\left\| \begin{array}{l} \underline{U} \in \mathbf{u}^{[0, T]} \\ \forall t \in [0, T] \quad \underline{U}|_{\partial_1\Omega} = \underline{U}_d \end{array} \right. \quad (1.1)$$

$$\left\| \begin{array}{l} \forall M \in \Omega \quad \underline{U}|_{t=0} = \underline{U}_0 \quad \dot{\underline{U}}|_{t=0} = \underline{V}_0 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

- équations d'équilibre

$$\left\| \begin{array}{l} \underline{\sigma} \in \mathbf{S}^{[0, T]} \text{ et } \forall t \in [0, T] \quad \forall \underline{U}^* \in \mathbf{u}_0 \\ - \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\sigma} \underline{\mathcal{E}}(\underline{U}^*)] d\Omega + \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^* dS = \int_{\Omega} \rho \ddot{\underline{U}} \cdot \underline{U}^* d\Omega \end{array} \right. \quad (1.3)$$

- relation de comportement

$$\left\| \begin{array}{l} \forall t \in [0, T] \quad \forall M \in \Omega \quad \underline{\sigma}|_t = \mathbf{A}(\underline{\mathcal{E}}(\dot{\underline{U}})|_{\tau}; \tau \in [0, t]) \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Dans cette formulation :

- $\underline{\mathcal{E}}(\underline{U})$ , déformation associée à  $\underline{U}$  en petites perturbations, est définie par :

$$\left\| \begin{array}{l} \underline{\mathcal{E}}(\underline{U}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \underline{U}}{\partial M} + \left( \frac{\partial \underline{U}}{\partial M} \right)^T \right] \end{array} \right.$$

- $\rho$  désigne la masse volumique qui, ici, est constante par rapport à  $t$ ,
- $\mathbf{u}^{[0, T]}$  désigne l'espace où est cherché le champ de déplacement,
- $\mathbf{S}^{[0, T]}$  désigne l'espace où est cherché le champ de contrainte,
- $\mathbf{u}_0$  désigne l'espace des champs virtuels choisis ; il est de la forme :

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbf{u}_0 = \left\{ \underline{U}^* \text{ "régulier" et tel que : } \underline{U}^*|_{\partial_1\Omega} = 0 \right\} \end{array} \right.$$

- $\mathbf{A}$  est un opérateur qui caractérise le comportement ; la valeur à l'instant  $t$  de la contrainte est une fonction de l'histoire de la vitesse de déformation jusqu'à l'instant  $t$ .

### Remarques

**1.** La régularité imposée dépend des problèmes étudiés. Elle se traduit dans le choix des espaces  $\mathbf{u}^{[0, T]}$ ,  $\mathbf{S}^{[0, T]}$  et  $\mathbf{u}_0$ .

On pourra, par exemple, se reporter aux ouvrages [DUVAUT - LIONS, 1972], [BREZIS, 1973], [EKELAND - TEMAM, 1974], [NECAS - HLAVACEK, 1981], [DAUTRAY - LIONS, 1984], [POGU - TOURNEMINE, 1992].

2. Les équations d'équilibre (1.3) sont équivalentes aux équations locales :

$$\left\| \begin{array}{l} \forall t \in [0, T] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{div } \underline{\sigma} + \underline{f}_d = \rho \ddot{\underline{U}} \quad \text{dans } \Omega \\ \underline{\sigma} \underline{n} = \underline{F}_d \quad \text{sur } \partial_2 \Omega \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.5)$$

où  $\underline{n}$  désigne le vecteur unité normal et extérieur à la frontière  $\partial\Omega$ .

### 1.2.1 Elasticité linéaire

Une forme très simple du problème précédent, est celle de la statique linéaire où les données  $\underline{U}_d$ ,  $\underline{f}_d$  et  $\underline{F}_d$  et les champs inconnus  $\underline{U}$  et  $\underline{\sigma}$  sont indépendants du temps et où la relation de comportement est une relation linéaire entre la contrainte  $\underline{\sigma}$  et la déformation  $\underline{\varepsilon}$  (élasticité linéaire). Bien sûr, dans ce cas, il n'y a plus lieu d'écrire les conditions initiales (1.2) et on s'intéresse à la configuration finale à l'instant  $T$ . Le problème de référence devient :

Trouver  $\underline{U}(M)$  et  $\underline{\sigma}(M)$  définis sur  $\Omega$  tels que :

- équations de liaison

$$\left\| \begin{array}{l} \underline{U} \in \mathbf{U} \text{ et } \underline{U}|_{\partial_1 \Omega} = \underline{U}_d \end{array} \right. \quad (1.6)$$

- équations d'équilibre

$$\left\| \begin{array}{l} \underline{\sigma} \in \mathbf{S} \text{ et } \forall \underline{U}^* \in \mathbf{U}_0 \quad \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\sigma} \underline{\varepsilon}(\underline{U}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^* dS \end{array} \right. \quad (1.7)$$

- relation de comportement

$$\left\| \begin{array}{l} \underline{\sigma} = \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{U}) \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Dans cette formulation :

- $\mathbf{K}$  désigne l'opérateur de HOOKE du matériau.

Par exemple, pour un matériau élastique isotrope, on a :  $\mathbf{K} \underline{\varepsilon} = \lambda \text{Tr}(\underline{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \underline{\varepsilon}$ , où  $\mathbf{I}$  est l'opérateur identité et  $\lambda$  et  $\mu$  sont les deux coefficients de LAME.

- Les espaces  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{S}$  sont les analogues des espaces  $\mathbf{U}^{[0,T]}$  et  $\mathbf{S}^{[0,T]}$  pour des champs indépendants du temps.

### 1.2.2 Problèmes quasi-statiques

Une autre version simplifiée correspond au cas où l'on peut considérer que les termes d'accélération sont négligeables. On obtient le problème :

Trouver  $\underline{U}(M,t)$  et  $\underline{\sigma}(M,t)$  définis sur  $\Omega \times [0, T]$  tels que :

- équations de liaison et conditions initiales

$$\left\| \begin{array}{l} \underline{U} \in \mathbf{U}^{[0,T]} \\ \forall t \in [0, T] \quad \underline{U}|_{\partial_1 \Omega} = \underline{U}_d \end{array} \right. \quad (1.9)$$

$$\left\| \begin{array}{l} \forall M \in \Omega \quad \underline{U}|_{t=0} = \underline{U}_0 \quad \dot{\underline{U}}|_{t=0} = \underline{V}_0 \end{array} \right. \quad (1.10)$$

- équations d'équilibre

$$\left\| \begin{array}{l} \underline{\sigma} \in \mathbf{S}^{[0,T]} \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall \underline{U}^* \in \mathbf{U}_0 \\ \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\sigma} \underline{\varepsilon}(\underline{U}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{U}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U}^* dS \end{array} \right. \quad (1.11)$$

- relation de comportement

$$\| \forall t \in [0, T] \quad \forall M \in \Omega \quad \sigma|_t = \mathbf{A}(\underline{\dot{U}})|_t; \tau \in [0, t] \quad (1.12)$$

Il s'agit alors d'un problème dit de "quasistatique".

### 1.3 Problème approché et erreurs de discrétisation

#### 1.3.1 Problèmes linéaires

Actuellement, la méthode la plus utilisée pour obtenir des approximations des équations [(1.6) - (1.8)] est la méthode des éléments finis en déplacement.

##### ■ La méthode des éléments finis en déplacement

Cette méthode consiste à formuler le problème [(1.6) - (1.8)] en utilisant l'énergie potentielle :

$$\| E_P(\underline{U}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{U}) \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{U})] d\Omega - \left[ \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{U} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U} dS \right]$$

En effet, le déplacement  $\underline{U}_{ex}$  est solution du problème de minimisation :

$$\| E_P(\underline{U}_{ex}) = \underset{\underline{U} \in CA}{\text{Min}} E_P(\underline{U}) \quad (1.13)$$

où les champs " $\underline{U} \in CA$ " sont les champs de déplacement Cinématiquement Admissibles c'est-à-dire les champs qui vérifient les équations de liaison (1.6).

$\sigma_{ex}$  est alors obtenu par :

$$\| \sigma_{ex} = \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{U}_{ex})$$

La méthode des éléments finis en déplacement consiste à rechercher le minimum de l'énergie potentielle, non plus sur l'ensemble de tous les champs CA, mais uniquement sur un sous-espace de dimension finie de champs CA. Le champ approché  $\underline{U}_h$  est donc solution du problème :

$$\| E_P(\underline{U}_h) = \underset{\underline{U} \in CA \text{ et de type E.F.}}{\text{Min}} E_P(\underline{U}) \quad (1.14)$$

ou, sous forme de conditions d'extrémalité :

Trouver un champ de déplacement  $\underline{U}_h$  défini sur  $\Omega$  tel que :

$$\| \begin{aligned} & \underline{U}_h \in \mathbf{u}_h \text{ et } \forall \underline{U}_h^* \in \mathbf{u}_{h0} \\ & \int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\varepsilon}(\underline{U}_h) \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{U}_h^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{U}_h^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U}_h^* dS \end{aligned} \quad (1.15)$$

où  $\mathbf{u}_h$  est le sous-espace affine de dimension finie de  $\mathbf{u}$  choisi et  $\mathbf{u}_{h0}$  le sous-espace vectoriel associé qui est un sous-espace vectoriel de  $\mathbf{u}_0$ .

Le champ de contrainte  $\sigma_h$  est obtenu, élément par élément, par la relation de comportement :

$$\| \sigma_h = \mathbf{K} \underline{\varepsilon}(\underline{U}_h) \quad (1.16)$$

En pratique, le problème (1.15) se traduit par le système linéaire :

$$\| \mathbb{K} \mathbf{q} = \mathbf{F} \tag{1.17}$$

où :

- $\mathbf{q}$  désigne le vecteur des déplacements nodaux (degrés de liberté),
- $\mathbb{K}$  la matrice de rigidité,
- $\mathbf{F}$  le vecteur des charges généralisées.

Par exemple, pour  $\underline{U}_d = 0$ , on a :

$$\| \mathbb{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} d\Omega; \quad \mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \underline{f}_d d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{N}^T \underline{F}_d d\Gamma \tag{1.18}$$

avec :

$$\| \underline{U}_h(M) = \mathbf{N}(M) \mathbf{q} \quad \underline{\sigma}_h(M) = \mathbf{B}(M) \mathbf{q} \tag{1.19}$$

où  $\mathbf{N}$  est la matrice des fonctions de forme.

Pour la méthode des éléments finis, on pourra consulter, par exemple [BATHE, 1982], [IMBERT, 1984], [HUGHES, 1987], [BATOZ - DHATT, 1990], [ZIENKIEWICZ - TAYLOR, 1988].

■ **Origine des erreurs d'approximation**

□ **Le non respect des équations d'équilibre**

Si l'on compare le problème de référence et le problème approché, on constate que  $(\underline{U}_h, \underline{\sigma}_h)$  vérifie, comme  $(\underline{U}_{ex}, \underline{\sigma}_{ex})$ , les équations de liaison et la relation de comportement. Par contre, le champ  $\underline{\sigma}_h$  ne vérifie pas les équations d'équilibre :

*dans la méthode des éléments finis de type déplacement, l'approximation principale porte sur les équations d'équilibre*

De façon précise, la contrainte  $\underline{\sigma}_h$  présente trois types de défauts d'équilibre :

- l'équation d'équilibre intérieure n'est pas vérifiée :

$$\| \underline{div} \underline{\sigma}_h + \underline{f}_d \neq 0 \text{ dans } \Omega \tag{1.20}$$

- le vecteur contrainte n'équilibre pas les charges données

$$\| \underline{\sigma}_h \underline{n} \neq \underline{F}_d \text{ sur } \partial_2 \Omega \tag{1.21}$$

- le vecteur contrainte est discontinu à l'interface entre deux éléments :

$$\| [\underline{\sigma}_h \underline{n}]_{|E_1} + [\underline{\sigma}_h \underline{n}]_{|E_2} \neq 0 \text{ sur } \Gamma_{E_1 E_2} \tag{1.22}$$

où les notations sont précisées sur la Figure 1-3.

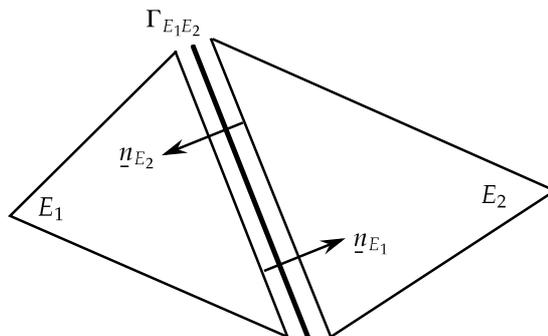


Figure 1-3 : Notations à l'interface entre deux éléments

### ■ Les autres sources d'erreurs de discrétisation

Selon le modèle mécanique continu qui a été retenu d'autres sources d'erreurs existent :

- erreurs dues au non respect de la géométrie
- erreurs dues à l'approximation des conditions aux limites en déplacement :
- erreurs dues à l'approximation des charges appliquées :
- erreurs dues au traitement numérique du problème approché :

Les trois premiers types d'erreurs peuvent, dans un premier temps, être laissés de côté, ce qui revient à supposer que les approximations correspondantes ont été effectuées au niveau du modèle mécanique continu de référence. Pour plus de détails sur ces types d'erreur, le lecteur pourra consulter par exemple [STRANG - FIX, 1976], [CIARLET, 1978].

Le dernier type est de nature différente et il ne peut être évité. Néanmoins, compte tenu de la précision actuelle des ordinateurs, dans de nombreuses situations courantes ces erreurs sont tout à fait négligeables devant les erreurs de discrétisation proprement dites dues au non respect des équations d'équilibre du modèle de référence.

Toutefois, des méthodes d'évaluation, ou tout au moins de détection, de ce type d'erreurs existent, par exemple la méthode de [LA PORTE -VIGNE, 1974] qui est stochastique. Pratiquement, il est donc nécessaire d'effectuer plusieurs calculs en propageant différemment les erreurs d'arrondis [DAUMAS - MULLER, 1997].

### 1.3.2 Problèmes non linéaires

Nous considérons ici, à titre d'exemple, un problème non linéaire en quasistatique [équations (1.9) - (1.12)]. Le traitement classique de ce type de problème par la méthode incrémentale nécessite à la fois une discrétisation spatiale et une discrétisation temporelle.

#### ■ Discrétisation du problème

Pour simplifier, nous supposons que les déplacements imposés sont nuls :  $\underline{U}_d = 0$ .

#### □ Discrétisation en espace

Le champ de déplacement est recherché sous la forme :

$$\| \underline{U}_h(M,t) = \mathbf{N}(M) \mathbf{q}(t) \quad (1.23)$$

où  $\mathbf{N}$  est la matrice des fonctions de forme (données) correspondant à une discrétisation de type éléments finis et  $\mathbf{q}$  un vecteur de fonctions du temps (inconnues) qui représentent les déplacements nodaux à chaque instant. On obtient ainsi le problème approché :

Trouver  $\underline{U}_h$  de type éléments finis et  $\underline{\sigma}_h$  tels que :

$$\| \forall t \in [0, T] \quad \underline{U}_h \text{ est CA et vérifie les conditions initiales} \quad (1.24)$$

$$\| \begin{aligned} &\forall t \in [0, T] \text{ et } \forall \underline{U}_h^* \in \mathbf{U}_{h0} \\ &\int_{\Omega} \text{Tr}[\underline{\sigma}_h \underline{\mathcal{E}}(\underline{U}_h^*)] d\Omega = \int_{\Omega} \underline{f}_d \cdot \underline{U}_h^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \underline{F}_d \cdot \underline{U}_h^* dS \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\| \begin{aligned} &\forall t \in [0, T] \quad \forall M \in \Omega \\ &\underline{\sigma}_h|_t = \mathbf{A}(\underline{\mathcal{E}}(\underline{U}_h)|_{\tau}; \tau \in [0, t]) \end{aligned} \quad (1.26)$$

qui est un problème discrétisé en espace mais continu en temps.

□ **Discrétisation en temps**

Pour résoudre les équations [(1.24) - (1.26)] de façon approchée, on effectue une discrétisation de  $[0, T]$  en le subdivisant en  $p$  sous-intervalles  $[t_n, t_{n+1}]$  :

$$\parallel 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p = T$$

La solution est déterminée pas à pas. En supposant la solution approchée connue jusqu'au temps  $t_n$ , il s'agit de déterminer le déplacement et la contrainte sur l'incrément  $[t_n, t_{n+1}]$ . Chaque incrément étant choisi "petit", on fait généralement l'hypothèse d'une variation linéaire de  $\underline{U}_h(M, t)$  sur  $[t_n, t_{n+1}]$  :

$$\parallel \underline{U}_h(M, t) = [\underline{U}_h(M, t_{n+1}) - \underline{U}_h(M, t_n)] \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + \underline{U}_h(M, t_n)$$

c'est-à-dire, en notation éléments finis :

$$\parallel \mathbf{q}(t) = [\mathbf{q}(t_{n+1}) - \mathbf{q}(t_n)] \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + \mathbf{q}(t_n) \tag{1.27}$$

La seule inconnue est alors le déplacement  $\mathbf{q}(t_{n+1})$  à  $t_{n+1}$ . Pour déterminer  $\mathbf{q}(t_{n+1})$ , on écrit l'équilibre (1.25) à  $t_{n+1}$ . On obtient ainsi le problème :

Trouver :  $\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}(t_{n+1})$  et :  $\mathcal{C}_{h, n+1} = \mathcal{C}_h(t_{n+1})$  tels que :

$$\parallel \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathcal{C}_{h, n+1} d\Omega = \mathbf{F}_{n+1} \text{ et } \mathcal{C}_{h, n+1} = \mathbf{A} [\mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(\tau) |_{\tau \leq t_{n+1}}] \tag{1.28}$$

avec :

$$\parallel \mathbf{F}_{n+1} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \underline{f}_d(t_{n+1}) d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{N}^T \underline{F}_d(t_{n+1}) dS$$

Comme l'histoire de la vitesse de déformation jusqu'à  $t_{n+1}$  ne dépend que de  $\mathbf{q}_{n+1}$ , il en est de même de la contrainte  $\mathcal{C}_{h, n+1}$ . (1.28) est donc une équation non linéaire dont l'inconnue est  $\mathbf{q}_{n+1}$  et où le temps n'intervient plus.

Cette équation est résolue, de façon approchée, par une méthode itérative, généralement par une méthode de type NEWTON.

■ **Origine des erreurs de discrétisation**

La discrétisation en espace entraîne que les champs de contrainte calculés ne vérifient pas les équations d'équilibre du modèle de référence mais, au mieux, uniquement les équations affaiblies au sens des éléments finis. La discrétisation en temps introduit de nouvelles approximations :

- l'hypothèse sur la variation en temps du champ de déplacement sur l'incrément constitue une première approximation qui, si les pas de temps sont choisis trop grands, peut être une source d'erreur importante ;
- la résolution sur chaque incrément du problème non linéaire (1.28) par une méthode itérative introduit aussi des approximations ;
- au cours des itérations précédentes, on est amené à intégrer, par un schéma numérique, la relation de comportement pour une histoire de déformation donnée ;

cette intégration numérique introduit des approximations qui peuvent être importantes ;

- le champ de contrainte  $\mathcal{O}_{h, n+1}$  cherché à la fin d'un incrément n'est connu que par ses valeurs en un certain nombre de points de GAUSS de chaque élément.

## 1.4 Estimation des erreurs de discrétisation

### 1.4.1 Les estimations a priori

Dans de nombreuses situations, l'analyse fonctionnelle et l'analyse numérique permettent d'obtenir, sous certaines hypothèses de régularité, des résultats d'estimation *a priori* de la forme :

$$\| \| \underline{U}_{ex} - \underline{U}_h \| \leq E(h, D, \underline{U}_{ex}) \quad (1.29)$$

où  $\| \cdot \|$  est une norme sur les champs de déplacement et  $E$  une fonction de la taille  $h$  des éléments, des données  $D$  du problème et de la solution exacte  $\underline{U}_{ex}$ .

Si la fonction  $E$  est telle que :

$$\| \lim_{h \rightarrow 0} E(h, D, \underline{U}_{ex}) = 0$$

alors on obtient la convergence de la méthode d'éléments finis utilisée. Si l'on peut montrer qu'il existe un réel  $q > 0$  tel que :

$$\| E(h, D, \underline{U}_{ex}) \leq h^q \tilde{E}(D, \underline{U}_{ex}) \quad (1.30)$$

on a aussi des informations sur la vitesse de convergence en fonction de la taille.

Néanmoins, comme ces estimations font intervenir la solution exacte, elles ne peuvent être explicitement calculées et elles ne fournissent donc aucune information sur la valeur de l'erreur.

### 1.4.2 Les estimations a posteriori

#### ■ Le principe des estimateurs d'erreur classiques

L'idée de base est d'utiliser la solution approchée pour évaluer l'erreur de discrétisation. Contrairement aux estimations a priori, ces estimations ne peuvent être utilisées qu'une fois la solution approchée calculée et sont donc appelées des estimations a posteriori.

Les très nombreuses propositions qui ont été, et sont encore, faites dans ce domaine peuvent être schématiquement classées en trois catégories :

- les mesures d'erreurs fondées sur le concept d'erreur en relation de comportement et sur des techniques adaptées de construction de champs admissibles [LADEVEZE, 1975...];
- les estimateurs d'erreurs fondés sur les défauts d'équilibre de la solution éléments finis [BABUSKA - RHEINOLDT, 1978...]; ces estimateurs, ont fait l'objet de nombreux travaux en analyse numérique ;
- les indicateurs d'erreurs construits sur les défauts de régularité de la solution éléments finis [ZIENKIEWICZ - ZHU, 1987...].

Toutes ces démarches fournissent à l'utilisateur une évaluation  $\mathbf{e}$  de l'erreur globale de discrétisation et une estimation  $\mathbf{e}_E$  de la contribution à l'erreur globale de chaque élément  $E$  du maillage utilisé. Généralement, ces deux estimations sont reliées par :

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \sum_E \mathbf{e}_E^2 \quad (1.31)$$

A ces erreurs "absolues", on associe classiquement des erreurs "relatives"  $\varepsilon = \mathbf{e}/\mathbf{d}$  et  $\varepsilon_E = \mathbf{e}_E/\mathbf{d}$  où  $\mathbf{d}$  est une quantité choisie pour normaliser ces différentes estimations.

### 1.4.3 Qualités d'un estimateur

Les différentes méthodes développées pour construire des estimations d'erreur a posteriori se distinguent bien sûr par les techniques employées mais aussi par la qualité des résultats obtenus. Pour comparer ces différentes méthodes, plusieurs critères peuvent être utilisés :

- critères de qualité intrinsèque permettant de comparer l'erreur mesurée avec l'erreur "vraie" réellement commise,
- critère de fiabilité : l'erreur estimée majore-t-elle l'erreur "vraie" ?
- sensibilité à des situations particulières de maillages : maillages grossiers, éléments aplatis, éléments distordus...
- sensibilité à des comportements particuliers : anisotropie des matériaux...
- critères économiques : simplicité de mise en œuvre, coût d'utilisation...
- étendue du domaine d'application.

Nous allons donner ici quelques critères intrinsèques de qualité aujourd'hui communément admis. Des études très complètes sur la qualité des estimateurs d'erreurs et sur leur comportement peuvent être trouvées dans les références [ODEN - DEMKOWICZ - RACHOWICZ - WESTERMANN, 1989], [BECKERS - ZHONG, 1991], [STROUBOULIS - HAQUE, 1992], [BABUSKA - STROUBOULIS - UPADHYAY - GANGARAJ, 1994], [BABUSKA - STROUBOULIS - UPADHYAY - GANGARAJ - COPPS, 1994].

#### ■ Indice d'efficacité

L'indice d'efficacité est défini par :

$$\|\gamma = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{e}_{ex}} = \frac{\text{mesure estimée de l'erreur globale}}{\text{mesure de l'erreur vraie globale}} \quad (1.32)$$

En pratique, pour un bon estimateur, l'indice d'efficacité global doit être proche de 1. Pour évaluer  $\gamma$ , la méthode la plus sûre consiste à utiliser des problèmes tests pour lesquels la solution exacte est connue analytiquement.

Une autre technique, largement répandue, consiste à prendre comme solution "exacte" une solution éléments finis obtenue sur un maillage très fin. Pour obtenir des résultats fiables, il est indispensable que ce maillage soit nettement plus fin que le maillage sur lequel l'erreur est estimée et il faut prendre quelques précautions pour transférer les champs d'un maillage à l'autre.

De manière analogue, on définit un indice local d'efficacité par élément (ou sur un paquet d'éléments) par :

$$\|\gamma_E = \frac{\mathbf{e}_E}{\mathbf{e}_{ex|E}} = \frac{\text{mesure estimée de l'erreur sur } E}{\text{mesure de l'erreur vraie sur } E} \quad (1.33)$$

### ■ Comportement asymptotique

Pour certains estimateurs d'erreurs, il existe deux constantes positives  $C_{min}$  et  $C_{max}$ , indépendantes de la taille des éléments, telles que :

$$\| \| C_{min} \leq \gamma \leq C_{max} \quad (1.34)$$

Ces inégalités montrent que l'erreur "vraie" et l'estimation d'erreur utilisée tendent vers zéro simultanément.

De plus, si l'on dispose d'une inégalité du type

(1.30), on obtient :

$$\| \| \mathbf{e} \leq C h^q \quad (1.35)$$

Cette inégalité, qui renseigne sur la vitesse de convergence de l'estimateur d'erreur en fonction de la taille, est très utile pour adapter les maillages.

#### Remarque

Il est souhaitable que les constantes  $C_{min}$  et  $C_{max}$  soient proches de 1. Du point de vue de la fiabilité, il est évidemment intéressant d'utiliser des estimateurs tels que :  $C_{min} = 1$

## I.5 Bibliographie du chapitre I

BABUSKA - RHEINBOLDT, 1978

"Error estimates for adaptive finite element computation", *SIAM J. Num. Anal.*, 15, 4, 736-754

BABUSKA - STROUBOULIS - UPADHYAY - GANGARAJ - COPPS, 1994

"Validation of a posteriori error estimators by numerical approach", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 37, 1073-1123

BABUSKA - STROUBOULIS - UPADHYAY - GANGARAJ, 1994

"A model study of the quality of a posteriori estimators for linear elliptic problems : error estimation in the interior of patchwise uniform grids of triangles", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 114, 307-378

BATHE, 1982

*Finite element procedure in engineering analysis*, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs

BATOZ - DHATT, 1990

*Modélisation des structures par éléments finis*, vol I, II et III, Hermès, Paris

BECKERS - ZHONG, 1991

"Influence of element distortions on the reliability of some a posteriori error estimators", *Proc. of the European conference on new advances in computational structural mechanics*, LADEVEZE and ZIENKIEWICZ Editors, Giens (France), 9-16

BREZIS, 1973

*Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contraction*, North-Holland, Mathematics Studies

CIARLET, 1978

*The finite element method for elliptic problems*, North-Holland

DAUMAS - MULLER, 1997

*Qualité des calculs sur ordinateurs*, Masson, Paris

DAUTRAY - LIONS, 1984

*Analyse mathématique et calculs numériques pour les sciences et les techniques*, tomes 1 à 9, Masson, Paris

DUVAUT - LIONS, 1972

*Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris

EKELAND - TEMAM, 1974

*Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Paris

HUGUES, 1987

*The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs

IMBERT, 1984

*Analyse des structures par Eléments Finis*, CEPADUES Editions, Toulouse

LA PORTE - VIGNE, 1974

*Error analysis in computing*, Information Processing, North-Holland

LADEVEZE, 1975

*Comparaison de modèles de milieux continus*, Thèse d'Etat, Université P et M. Curie, Paris (France)

NECAS - HLAVACEK, 1981

*Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies : an introduction*, Elsevier

ODEN - DEMKOWICZ - RACHOWICZ - WESTERMANN, 1989

"Toward a universal h-p adaptive finite element strategy - Part 2. A posteriori error estimation", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 113-180

POGU - TOURNEMINE, 1992

*Modélisation et résolution d'équations de la mécanique des milieux continus*, Ellipse, Paris

STRANG - FIX, 1976

*An analysis of the finite element method*, Prentice Hall

STROUBOULIS - HAQUE, 1992

"Recent experiences with error estimation and adaptivity. Part I : review of error estimators for scalar elliptic problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 97, 339-436

ZIENKIEWICZ - TAYLOR, 1988

*The finite element method : basic formulation and linear problems*, Mc Graw-Hill, Londres (Traduction française, 1991, AFNOR Techniques)

ZIENKIEWICZ - ZHU, 1987

"A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24, 337-357