

Introduction aux problèmes inverses

La définition des problèmes inverses n'est pas simple. On peut les caractériser de façon stricte par des définitions mathématiques pour chaque problème, mais bien souvent cette appellation recouvre des problèmes divers qui partagent tous le même caractère mal posé par opposition aux problèmes dits directs.

On commence par présenter quatre situations types, mais liées à des problèmes concrets. Puis on passe en revue les diverses caractéristiques de ces problèmes et particulièrement leurs difficultés propres. Les méthodes de résolution (voire même de formulation) de ces problèmes ainsi que les algorithmes associés font l'objet des autres chapitres.

1. QUATRE EXEMPLES DE PROBLEMES INVERSES **2**

- 1.1. Détermination de la loi de comportement d'un matériau à partir d'essais de torsion pure : Equation intégrale de Fredholm de première espèce 2
- 1.2. Identification de fissures, hétérogénéités ou de cavités : données surabondantes au bord, opérateur de Dirichlet-Neuman 4
- 1.3. Identification de paramètres distribuées pour une équation d'évolution 6
- 1.4. Identification d'un paramètre de conditions aux limites : coefficient d'échange pour un bord inaccessible, le cas des petites perturbations 7

2. PROBLEMES MAL POSES **9**

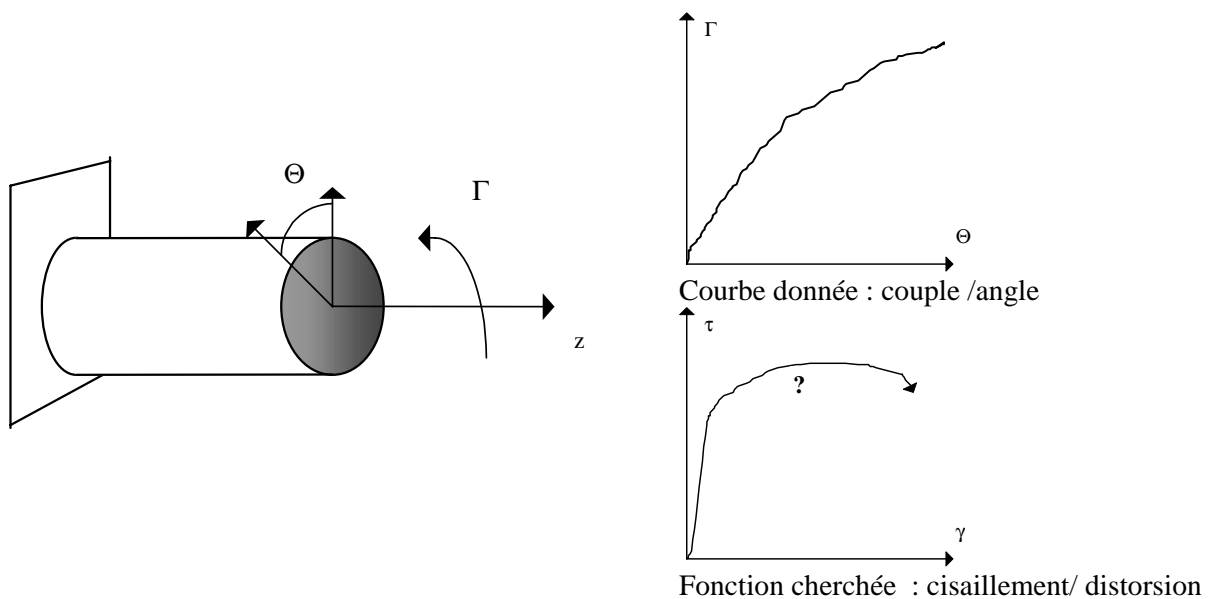
- 2.1. Problèmes bien posés : les problèmes directs et contre exemples 9
- 2.2. Caractère mal posé des exemples de problèmes inverses 11
 - 2.2.1. Equation de Fredholm de première espèce 11
 - 2.2.2. Opérateur de Dirichlet-Neuman 14

1. Quatre exemples de problèmes inverses

1.1. Détermination de la loi de comportement d'un matériau à partir d'essais de torsion pure : Equation intégrale de Fredholm de première espèce

Un grand nombre de problèmes inverses apparaissent sous cette forme. Prenons l'exemple de la détermination de la loi de comportement uniaxiale d'un matériau. On cherche à déterminer la loi cisaillement / distorsion d'un matériau via un essai de torsion pure sur un barreau cylindrique (cylindre de révolution).

L'expérience est réalisée en imposant une rotation (rigidifiante) Θ , d'axe Oz , à l'extrémité d'un cylindre encastré à l'autre extrémité. Aucun autre effort qu'un couple de torsion Γ n'est appliqué à l'éprouvette. Ce couple est mesuré au cours d'une expérience de rotation croissante.



Données : . la géométrie du système (rayon R et longueur L du cylindre),
 . une fonction $\Gamma(\Theta)$, $\Theta \in [0, \Theta_{\max}]$

Inconnue : . la fonction $\tau = f(\gamma)$ où τ est le cisaillement et γ la distorsion correspondante

(on suppose pour simplifier que cette loi est injective (en chargement croissant par exemple ceci n'est pas une hypothèse trop restrictive, elle inclut les comportements adoucissants, parfaitement plastiques..)

Le problème direct serait bien sûr de déterminer la courbe moment-rotation globale, l'histoire de rotation étant donnée ainsi que la loi de comportement du matériau.

La façon de poser le problème inverse introduit implicitement quelques hypothèses, liées à notre connaissance du problème direct :

1. Les champs de contraintes et de déformations qui se développent sont supposés indépendants de la variable z (cf figure pour les notations).
2. le champ de contraintes est uniaxial : $\boldsymbol{\sigma}(r, \theta) = \tau(r) (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta)$. On peut vérifier que ce type de champ est statiquement admissible dès que :
 - . τ est une fonction quelconque de r (en particulier elle n'a pas à être continue)

. les efforts de cisaillement équilibrent le couple appliqué : $2\pi \int_0^R \tau(r)r^2 dr = \Gamma$

3. le champ de déplacement est supposé réaliser des rotations rigidifiantes de chaque section, la rotation axiale (de torsion) évoluant linéairement avec z

. $\mathbf{u}(r, \theta, z) = \Theta \frac{rz}{L} \mathbf{e}_\theta$ (\mathbf{u} est cinématiquement admissible avec les conditions en $z=0$ et $z=L$)

. ce qui conduit au tenseur de déformation linéarisé suivant (qui respecte bien l'hypothèse 1) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(r, \theta) = \gamma(r) (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta), \text{ avec } \gamma(r) = \Theta \frac{r}{2L}$$

La propriété que le cisaillement τ est relié uniquement à la distorsion γ résulte d'hypothèses sur le matériau (symétries). Dans le cas d'un matériau anisotrope, il faudra en sus s'assurer que les propriétés de symétries du matériau sont compatibles avec la géométrie de l'essai (dans le cas d'anisotropie transverse par exemple : que l'axe d'isotropie transverse est celui du cylindre).

Moyennant ces hypothèses, une équation sur la fonction inconnue f apparaît immédiatement en rassemblant les propriétés des tenseurs des déformation et des contraintes :

$$\int_0^R f\left(\frac{\Theta r}{2L}\right) r^2 dr = \frac{\Gamma(\Theta)}{2\pi} \quad \forall \Theta \in [0, \Theta_{\max}]$$

Il est immédiat de constater que l'on ne pourra déterminer f que sur l'intervalle $[0, \frac{R\Theta_{\max}}{2L}]$

Si bien que le problème inverse se formule par :

Trouver la fonction f de $L^2(]0, \frac{R\Theta_{\max}}{2L}[)$ telle que : $\int_0^R f\left(\frac{\Theta r}{2L}\right) r^2 dr = \frac{\Gamma(\Theta)}{2\pi} \quad \forall \Theta \in [0, \Theta_{\max}]$ (1)

L'équation précédente est une *équation intégrale de Fredholm de première espèce*, dont la forme générale est :

$$g \text{ étant donnée, Trouver } f(x) \text{ sur l'intervalle } I \text{ telle que : } \int_I k(x, y) f(y) dy = g(x) \quad \forall x \in J$$

$k(x, y)$ est le noyau de l'équation.

On remarquera que les ensembles de définition de f et g (respectivement I et J) sont différents. Dans l'exemple traité, cela apparaît naturellement : la donnée et l'inconnue étant de nature physique différente. Dans la résolution de l'équation, il faudra garder à l'esprit cette particularité lorsque l'on discrétisera le problème. Ainsi apparaîtront deux discrétisations : l'une sur l'intervalle I pour décrire la fonction f recherchée, et l'autre sur l'intervalle J pour obtenir un nombre fini d'équations à partir de l'équation intégrale.

Compte tenu de la forme de l'équation (1), on peut la simplifier encore en effectuant le changement de variable : $x = r\Theta/2L$. Il vient alors :

Trouver la fonction f de $L^2(]0, \frac{R\Theta_{\max}}{2L}[)$ telle que : $\int_0^{\frac{R\Theta}{2L}} f(x) x^2 dx = \frac{\Theta^3}{16\pi L^3} \Gamma(\Theta) \quad \forall \Theta \in [0, \Theta_{\max}]$ (2)

Cette équation est un *équation de Volterra de première espèce*. C'est une équation de Fredholm pour laquelle $I=J$ et telle que le noyau possède la propriété : $k(x, y) = 0$ si $x > y$

$$g \text{ étant donnée, Trouver } f(x) \text{ de } L^2(]a, b[) \text{ telle que : } \int_a^y k(x, y) f(x) dx = g(y) \quad \forall y \in J \quad (3)$$

L'exemple pris ici est encore une forme dégénérée de l'équation de Volterra puisque le noyau ne dépend pas de y . La solution de ce problème est « explicite », il suffit de dériver l'équation (2) :

$$f\left(\frac{R\Theta}{2L}\right) = \frac{1}{2\pi R^3} \frac{1}{\Theta^2} \frac{d}{d\Theta} \left[\Theta^3 \Gamma(\Theta) \right] = \frac{1}{2\pi R^3} [3\Gamma(\Theta) + \Theta \Gamma'(\Theta)] \quad \Theta \in [0, \Theta_{\max}]$$

(4)

L'équation précédente montre que l'on a « résolu » théoriquement le problème inverse posé. Les difficultés pratiques de résolution de l'équation (3), hormis le cas où Γ est donnée sous forme analytique, sont cependant les mêmes que celle de l'équation (1). Nous le verrons plus loin.

Noter que le problème de « dérivation numérique » rencontré ici (puisque en général la donnée Γ n'est connue que par un nombre fini de mesures) est assez fréquent. Citons par exemple le cas de la détermination des contraintes dans un tube à partir de la mesure du profil déformé : cela requiert de calculer la dérivée seconde d'une donnée, connue sous forme discrète ... et bruitée par les inévitables erreurs de mesure.

Le lecteur vérifiera sans peine que l'équation de Volterra associée à la recherche de la fonction f , dérivée d'ordre n d'une donnée g est la suivante :

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^y f(x)(y-x)^{n-1} dx = g(y) \quad (5)$$

1.2. Identification de fissures, d'hétérogénéités ou de cavités : données surabondantes au bord, opérateur de Dirichlet-Neuman

Dans l'étude des problèmes directs elliptiques, c'est à dire en général des problèmes d'« équilibre » (thermique, mécanique, électrique,...) on donne souvent comme règle heuristique sur les conditions aux limites qu'elles doivent porter soit sur la variable primale (température, champ de déplacement, potentiel électrique,...) soit sur la variable duale (flux de température, densité d'effort surfacique, vecteur courant). Dans les cas les plus compliqués, on peut avoir une combinaison de conditions mais le nombre de conditions indépendantes doit toujours être le même.

Ces conditions assurent en général que le problème direct est soluble ; c'est à dire grossièrement que la détermination des champs dans le solide est possible, une fois les données au bord connues (et éventuellement les « sources » ou les efforts volumiques » donnés). Dans ces problèmes on suppose également connue la géométrie du solide et ses caractéristiques physiques (conductivité, modules élastiques,).

On peut avoir alors l'idée de déterminer ces caractéristiques, physiques ou géométriques, en se donnant plus de données au bord qu'il n'est nécessaire pour résoudre le problème direct. Ainsi, existe-t-il une grande famille de problèmes inverses dans lesquels on impose sur le bord du solide une condition portant sur un paramètre, par exemple un flux de chaleur, et on mesure le paramètre dual, par exemple la température en surface. Muni de ces données, dites surabondantes, on peut alors chercher à déterminer si le solide présente des fissures, des cavités, à identifier la forme d'un bord inaccessible (problèmes inverses géométriques), ou encore à estimer les propriétés physiques du milieu (champ de conductivité, de perméabilité, de module de Young,...). Ces problèmes portent souvent le nom de tomographie, nom générique¹ auquel on ajoute le phénomène physique employé (tomographie électrique, hydraulique etc..).

Nous prendrons pour exemple, le cas le plus simple celui de la tomographie thermique ou électrique, toutes deux formulées à l'aide des mêmes équations.

¹ Mot forgé dans les années trente sur *tomos* : « morceau découpé, tranche » et *graphie* : « écrire , enregistrer »

On considère un solide Ω , de conductivité $k(x)$ supposée isotrope pour simplifier, pouvant renfermer des fissures ou des cavités, ou comporter un bord inaccessible : toutes ces frontières inconnues étant pour le moment désignées par $\partial\Omega_i$.

Sur le bord accessible aux mesures $\partial\Omega_c$, on suppose que l'on sait imposer un flux Φ ou une famille de flux Φ_i , ($i \in I$) et mesurer la température T^m atteinte à l'équilibre (ou les températures correspondantes T^m_i).

Les équations du problème sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(q) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ q = -k\nabla T \quad \text{dans } \Omega \\ -q \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_i \end{array} \right. \quad \text{ou encore} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\text{div}(k \cdot \nabla T) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ -k \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_i \end{array} \right. \quad (6)$$

Avec les données : $T = T^m \quad \text{et} \quad q \cdot n = \Phi \quad \text{sur } \partial\Omega_c$ (7)

On a supposé ici que les fissures ou les cavités (voire le bord extérieur inconnu) sont isolées thermiquement. D'autres conditions sont évidemment possibles.

On notera le bord du domaine Ω sous la forme : $\partial\Omega = \partial\Omega_c \cup \partial\Omega_i^e \cup \partial\Omega_i^i$. Ainsi :

- $\partial\Omega^e = \partial\Omega_c \cup \partial\Omega_i^e$ est le bord extérieur du domaine.
- $\partial\Omega_i^i$ est le bord des cavités ou des fissures à l'intérieur du domaine.

On peut formuler trois problèmes inverses selon les paramètres connus.

- *DN1* : Identification de paramètres distribués, à géométrie connue ($\partial\Omega_i = \emptyset$) :
A partir de la famille de données $(\Phi_i, T^m_i)_{i \in I}$, déterminer le champ $k(x)$
- *DN2* : Identification de fissures ou cavités, à conductivité $k(x)$ connue ($\partial\Omega_i^e = \emptyset$) :
A partir de la famille de données $(\Phi_i, T^m_i)_{i \in I}$, déterminer le bord intérieur $\partial\Omega_i^i$ au domaine Ω
- *DN3* : Identification de frontières extérieures, à conductivité $k(x)$ connue ($\partial\Omega_i^i = \emptyset$) :
A partir de la famille de données $(\Phi_i, T^m_i)_{i \in I}$, déterminer le bord $\partial\Omega_i^e$ au domaine Ω

Une formulation plus précise, mathématiquement, des deux premiers problèmes peut être définie en introduisant l'opérateur de Dirichlet-Neuman. C'est l'opérateur noté DN qui associe à la donnée de la température sur le bord (donnée de Dirichlet selon la terminologie des problèmes aux limites), le flux correspondant (donnée de Neuman). En supposant le domaine régulier et $k(x)$ satisfaisant aux conditions de positivité et bornitude usuelles :

$$0 < k_0 \leq k(x) \leq K_0 < \infty \quad \text{pp dans } \Omega$$

on a :

$$\text{DN}(\Omega, k) : \begin{array}{l} H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega) \\ T^m \rightarrow \Phi = -k \frac{\partial T}{\partial n} \end{array} \quad \text{où } T \text{ est solution de } \left\{ \begin{array}{l} -\text{div}(k \cdot \nabla T) = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ T = T^m \quad \text{sur } \partial\Omega_e \end{array} \right. \quad (8)$$

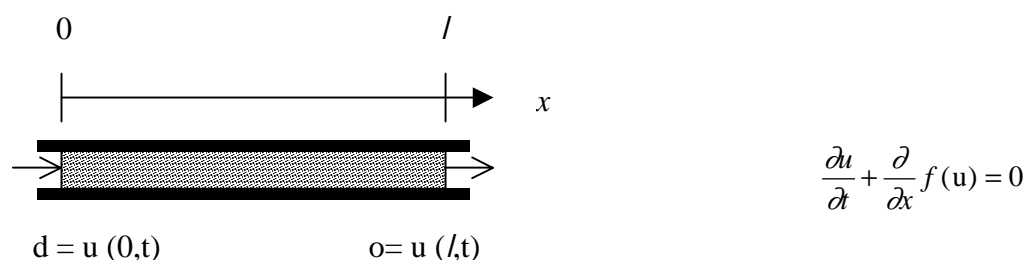
Les questions associées aux deux premiers problèmes inverses sont ainsi traduites de la façon suivante :

- La connaissance de l'opérateur DN (c'est à dire de tous les couples (T^m, Φ)) détermine-t-elle celle de k ou de Ω ?
- une connaissance partielle de DN suffit-elle ?
- Comment exploiter cette connaissance pour effectivement déterminer le champ k ou le domaine Ω (c'est à dire la partie inconnue $\partial\Omega_i$ de son bord) ?

1.3. Identification de paramètres distribués pour une équation d'évolution

Les problèmes inverses sont en général posés de façon analogue au cas précédent mais la structure des données et des inconnues peut être variable. De l'exemple suivant, nous tirerons la forme la plus usuelle des problèmes inverses.

Considérons une équation de transport monodimensionnelle :



On cherche à déterminer la fonction $f(u)$ par des essais de laboratoire, sur des éprouvettes de longueur l , dans lesquels les conditions initiales étant connues $u(x,0) = u_0(x)$, on contrôle la donnée à une extrémité de l'éprouvette $u(0,t) = d(t)$. Enfin on observe u à l'autre extrémité $u(l,t) = o(t)$. On dispose alors des équations suivantes :

$$\text{Equation d'état :} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \quad x \in]0, l[, t \in]0, T[\quad (9)$$

$$\text{Condition initiale :} \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [0, l] \quad (10)$$

$$\text{Condition donnée à la limite :} \quad u(0,t) = d(t), \quad t \in [0, T] \quad (11)$$

$$\text{Observation :} \quad u(l,t) = o(t) \quad t \in [0, T]$$

De façon générale, on note :

- \mathbf{F} l'espace des paramètres : c'est ici un espace de fonctions f définies sur un segment $[0, u_{\max}]$ à valeur dans \mathbb{R} .
- \mathbf{C} l'opérateur d'observation qui va de l'espace des états dans l'espace des observations :
 $\mathbf{C} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{O}$. \mathbf{U} est ici un espace de fonctions sur $]0, l[x[0, T]$ à valeurs dans \mathbb{R} , et l'espace d'observation \mathbf{O} un espace de fonctions de $[0, T]$ dans \mathbb{R} : $\mathbf{C}u = (u(l,t) ; t \in [0, T])$

Des contraintes d'origine physique (par exemple la positivité de la fonction f) ou des connaissances *a priori* (par exemple f est croissante, décroît exponentiellement, à un comportement quadratique au voisinage de zéro etc..) peuvent permettre de restreindre la recherche à un sous-ensemble de l'espace des paramètres : \mathbf{F}_{adm}

Une approche très fréquente de ce type de problèmes inverses consiste à minimiser la norme de l'écart entre l'observation et la solution associée à une fonction paramètre (output least square error) :

$$f_{\text{sol}} \text{ minimise } J(f) = \frac{1}{2} \|\mathbf{C}u(f) - o\|_{\mathbf{O}}^2 \text{ sur l'ensemble } \mathbf{F}_{\text{adm}}, \quad u(f) \text{ satisfaisant (9)-(11)}$$

$\|\cdot\|_{\mathbf{O}}$ est une norme sur l'espace des observations. Dans l'exemple suivi, ici ce peut être :

$$\|h\|_0 = \sqrt{\int_0^T |h(t)|^2 dt}$$

Au mieux cette erreur sera nulle si la fonction f conduit exactement à l'observation o , sinon la fonctionnelle est toujours positive. Dans cette approche, on considère l'ensemble des équations du problème comme un «système» dans lequel l'«entrée» est la fonction inconnue f et la «sortie» est l'observation : on recherche l'«entrée» qui minimise l'erreur entre la «sortie» et l'observation.

Il faut d'ores et déjà bien comprendre que malgré sa forme agréable la fonctionnelle J n'est pas quadratique sauf dans le cas très particulier où les paramètres f interviennent de façon linéaire dans l'observation $Cu \dots$ ce qui est bien rare (mais néanmoins rencontré parfois).

Cette méthode de construction du problème inverse est bien sûr susceptible de s'adapter à un grand nombre de situations selon la nature de l'équation d'état, des contraintes et des conditions sur l'ensemble des paramètres recherchés ou sur le type d'observation². Cependant son apparente simplicité cache bien des difficultés qui apparaissent dès que l'on s'attaque à la résolution du problème de minimisation.

1.4. Identification d'un paramètre de conditions aux limites : coefficient d'échange pour un bord inaccessible, le cas des petites perturbations

On va étudier ici un problème assez proche de l'exemple 2 (Identification de fissures ou du champ de conductivité à partir de mesures surabondantes au bord) mais en exploitant une situation particulière : celle où l'on recherche de petites perturbations d'une fonction connue. Cet exemple sera également l'occasion de montrer comment utiliser des champs auxiliaires, cette approche sera utilisée par la suite pour obtenir des résultats d'existence et d'unicité ou construire des méthodes performantes d'inversion.

On considère à nouveau un solide dont le bord $\partial\Omega = \partial\Omega_c \cup \partial\Omega_i$ est constitué d'une partie inaccessible aux mesures, noté $\partial\Omega_i$. On suppose connus :

- la géométrie, c'est à dire le domaine Ω et son bord ;
- le champ de conductivité du milieu qui constitue le solide ;
- un couple (ou une famille de couples) de température-flux sur le bord $\partial\Omega_c$.

Sur le bord inconnu, la condition à la limite est une condition d'échange (avec un fluide à température nulle pour simplifier) ou condition de Fourier :

$$q.n \equiv -k(x)\nabla T.n = h(x) T(x)$$

La fonction h est inconnue, mais l'on suppose qu'elle se met sous la forme :

$$h(x) = H(x) + \eta(x) \quad \text{avec } \eta \ll H \text{ et } H \text{ connue}$$

Le problème inverse est donc le suivant :

- Identification d'une condition d'échange sur un bord inaccessible :
A partir de la famille de données, $(\Phi_i, T_i^m)_{i \in I}$, déterminer la fonction $\eta(x)$ sur le bord $\partial\Omega_i$

Les équations du problème sont donc :

² On pourra chercher la « formulation par erreur aux moindres carrés » des trois autres exemples donnés dans cette partie.

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k \cdot \nabla T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ -k \cdot \nabla T \cdot n = (H + \eta)T & \text{sur } \partial\Omega_i \\ -k \cdot \nabla T \cdot n = \Phi & \text{sur } \partial\Omega_c \end{cases} \quad \text{avec la donnée } T = T^m \text{ sur } \partial\Omega_c$$

Si bien que le champ de température à l'équilibre satisfait également ³:

$$\int_{\Omega} k \nabla T \nabla \varphi = - \int_{\partial\Omega_c} \Phi \varphi - \int_{\partial\Omega_i} (H + \eta) T \varphi \quad \forall \varphi \quad (12)$$

Introduisons alors les champs auxiliaires suivants :

i) le champ T_H solution du problème à flux imposé Φ sur $\partial\Omega_c$, pour une condition d'échange de coefficient $H(x)$ sur $\partial\Omega_i$, soit :

$$\int_{\Omega} k \nabla T_H \nabla \varphi = - \int_{\partial\Omega_c} \Phi \varphi - \int_{\partial\Omega_i} H T_H \varphi \quad \forall \varphi \quad (13)$$

ii) une famille de champs Ψ_{μ} , indicée par μ , à l'équilibre avec un flux F_{μ} sur $\partial\Omega_c$ et un coefficient d'échange H sur $\partial\Omega_i$:

$$\int_{\Omega} k \nabla \Psi_{\mu} \nabla \varphi = - \int_{\partial\Omega_c} F_{\mu} \varphi - \int_{\partial\Omega_i} H \Psi_{\mu} \varphi \quad \forall \varphi \quad (14)$$

En utilisant Ψ_{μ} comme fonction test dans l'équation (12), T comme fonction test dans l'équation (14) et en soustrayant les deux égalités obtenues, il vient :

$$\int_{\partial\Omega_i} \eta T \Psi_{\mu} = \int_{\partial\Omega_c} -\Phi \Psi_{\mu} + F_{\mu} T^m$$

En linéarisant le premier membre cette équation pour tenir compte du fait que la fonction η est petite devant H , c'est à dire en remplaçant dans le produit ηT , T par T_H , on obtient une équation intégrale du type équation de Fredholm de première espèce pour η :

$$\text{Trouver } \eta(x) \text{ sur } \partial\Omega_i \text{ telle que} \quad \int_{\partial\Omega_i} \eta T_H \Psi_{\mu} = \int_{\partial\Omega_c} -\Phi \Psi_{\mu} + F_{\mu} T^m \quad \forall \mu$$

Dans cette équation, le second membre est en effet connu : (T , Φ) sont donnés et (Ψ_{μ} , F_{μ}) sont les champs auxiliaires.

La recherche de la perturbation η et non de la fonction $h(x)$ a permis de se ramener à une équation linéaire, bien que le problème soit a priori fortement non linéaire. Bien entendu, la stratégie de résolution sera lié au choix de la famille des champs Ψ_{μ} (famille analytique, famille obtenue par le calcul, famille de « petite taille », ...)

³ $\int_{\Omega} q_{i,i} \varphi = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} (q_i \varphi)_{,i} - q_i \varphi_{,i} = 0$ soit $\int_{\Omega} -q_i \varphi_{,i} = \int_{\partial\Omega} -q_i n_i \varphi$

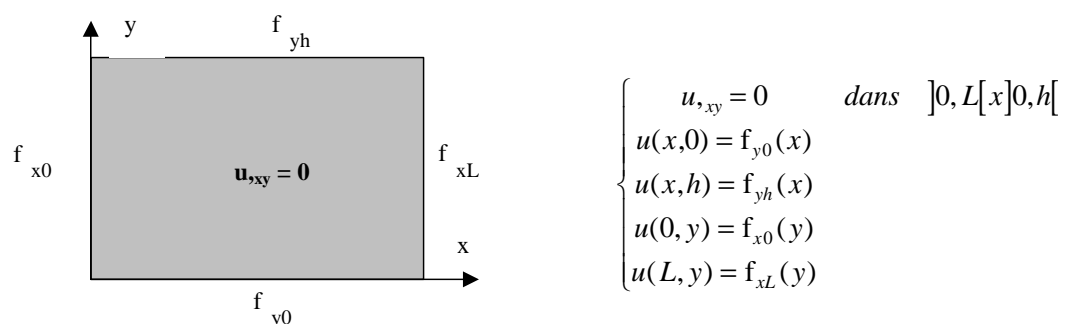
2. Problèmes mal posés

2.1. Problèmes bien posés : les problèmes directs et contre exemples

La plupart des problèmes « directs » de l'ingénieur sont posés via des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Le domaine dans lequel on recherche le champ u est noté Ω , (ce peut être le produit d'un domaine spatial ω par un intervalle de temps $[0, T]$ si le problème est un problème d'évolution). Les équations à résoudre comportent un opérateur A qui conduit à l'équation $A(u) = f$ dans Ω , équation à laquelle on ajoute des conditions de bord sur $\partial\Omega$. Au premier abord, il peut sembler que toutes les conditions de bord sont possibles pourvu qu'elles ne soient pas surabondantes. En fait, il n'en est rien et les conditions « correctes » à imposer sont liées de façon très précises à la nature de l'opérateur A .

Exemple 1 :

On considère un domaine rectangulaire $]0, L[x]0, h]$, sur lequel on cherche un champ scalaire u connu sur les bords du domaine et satisfaisant l'équation suivante :



$$\begin{cases} u_{,xy} = 0 & \text{dans }]0, L[x]0, h[\\ u(x,0) = f_{y0}(x) \\ u(x,h) = f_{yh}(x) \\ u(0,y) = f_{x0}(y) \\ u(L,y) = f_{xL}(y) \end{cases}$$

Les solutions de l'équation aux dérivées partielles sont nécessairement de la forme :

$$u(x,y) = U(x) + V(y)$$

si bien qu'*aucune solution n'existe au problème posé* si la donnée $f = (f_{x0}, f_{xL}, f_{y0}, f_{yh})$ ne satisfait pas les conditions suivantes :

$$f_{y0}(x) - f_{yh}(x) = C_y = \text{cste} \quad \text{et} \quad f_{x0}(y) - f_{xL}(y) = C_x = \text{cste}$$

Il s'agit ici d'un problème hyperbolique de « propagation » dans lequel on tente d'imposer la valeur du champ sur tout le bord du domaine. En effet, en effectuant le changement de variables :

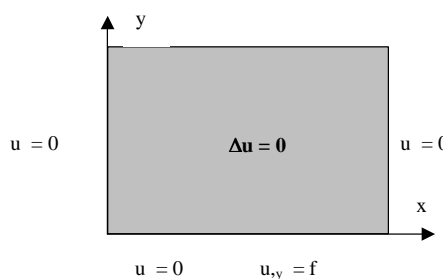
$$X = \frac{y+x}{2}, \quad t = \frac{y-x}{2}$$

l'équation devient l'équation des ondes : $U_{,XX} - U_{,tt} = 0$

Physiquement, on conçoit que l'on ne peut imposer une valeur quelconque à l'amplitude de l'onde à un instant donné si l'on se donne son amplitude à l'instant initial. C'est le sens de la condition sur la donnée f .

Exemple 2 :

On considère un domaine rectangulaire $]0, L[\times]0, h[$, sur lequel on cherche un champ scalaire u satisfaisant l'équation de Laplace, avec des « conditions initiales » sur le bord $y=0$. On impose de plus que u s'annule sur les bords latéraux $x=0$ et $x=L$:



$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans }]0, L[\times]0, h[\\ u = 0 & \text{sur } [0, L] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0, h] \cup \{L\} \times [0, h] \\ \frac{\partial u}{\partial y} = f & \text{sur }]0, L[\times \{h\} \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème de Cauchy (conditions portant sur u et ses dérivées sur une courbe) posé pour un opérateur elliptique. Examinons le cas particulier où la donnée f est une fonction sinus :

$$f_n(x) = \frac{L}{n\pi} \sin n\pi x/L$$

En cherchant une solution à variables séparées, il vient immédiatement :

$$u_n(x,y) = \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \sin n\pi x/L \operatorname{sh} n\pi y/L$$

Il existe donc une solution pour chaque donnée f_n . En convenant que $f_0 = 0$, la solution u_0 est identiquement nulle. Cependant, bien que les fonctions f_n tendent vers f_0 lorsque n tend vers zéro, il n'en va pas de même pour les solutions correspondantes. En effet pour tout (x,y) , la différence des solutions u_n et u_0 , qui n'est autre que u_n elle-même, peut être rendue arbitrairement grande pour n suffisamment grand (pour $y > 0$).

En fait, les fonctions u_n ne convergent vers u_0 dans aucune topologie raisonnable. Tel qu'il est posé le problème n'est donc pas stable vis à vis de perturbations des données.

Ces deux exemples montrent que tous les problèmes « directs » ne sont pas nécessairement formulés d'une façon qui assure que l'on puisse les résoudre d'une façon « raisonnable ». Jacques Hadamard a proposé une définition des problèmes bien posés, qui rassemble les conditions pour que la résolution de ceux-ci soit robuste.

Soit le problème abstrait ⁴:

$$K(u) = f \quad (\text{P})$$

où :

- . $f \in Y$
- . u est cherché dans X ,
- . X et Y sont deux espaces munis d'une topologie

On dira que le problème (P) est bien posé si et seulement si :

- i) pour tout f de Y , il existe une solution à (P)
- ii) cette solution est unique dans X
- iii) la dépendance de u vis à vis de f est continue (pour les topologies de Y et X)

⁴ K incluant à la fois l'opérateur A et les conditions de bord dans le cas d'un problème aux limites du type de ceux considérés précédemment.

On voit que le caractère bien posé d'un problème qualifie en fait le triplet (K, X, Y) . De façon évidente :

- la condition i) impose que K soit surjectif : $K(X) = Y$,
- la condition ii) que K soit injectif, si bien que l'ensemble des deux conditions nécessite que K soit inversible.

La dernière condition n'est pas autre chose que la **continuité de l'opérateur inverse** de K pour les topologies de X et Y .

Un problème ne satisfaisant pas les trois conditions d'Hadamard est dit mal posé *et une méthode de résolution approchée de ce type de problèmes est dite méthode de régularisation*. Deux pistes sont possibles pour régulariser un problème mal posé : modifier les espaces X et Y ⁵, ou modifier l'opérateur K . Que l'on en soit conscient ou non, proposer une méthode de résolution d'un problème qui est mal posé, c'est *toujours* proposer une méthode de régularisation : en effet seuls les problèmes bien posés ont un comportement raisonnable pour les applications pratiques !

La première piste est très souvent implicitement suivie dans bon nombre de problèmes inverses : on restreint l'espace de recherche des solutions et on « lisse » la donnée afin d'avoir une solution. On peut aussi de façon plus explicite chercher des topologies moins exigeantes. Le cas le plus fréquent de régularisation « implicite » est bien sûr celui de la réduction à un problème en dimension finie, Néanmoins, en général, si le nombre de degrés de liberté (ou de paramètres de description de la solution) croît, on se retrouve confronté à des problèmes très similaires aux difficultés de la dimension infinie, nous y reviendrons tout au long de ce cours.

La seconde piste est en général bien moins implicite puisque l'on modifie l'opérateur lui-même.

Il est parfois très difficile de vérifier de façon précise si les conditions de Hadamard sont vérifiées ou non. En général, la condition de continuité ou de non continuité de la solution vis à vis des données est la plus apparente. Les questions d'unicité ou d'existence de la solution sont quasiment toujours ouvertes, il existe cependant des résultats plus ou moins complets dont on donnera quelques exemples.

2.2. Caractère mal posé des exemples de problèmes inverses

2.2.1. Equation de Fredholm de première espèce

Les problèmes formulés à l'aide d'une équation de Fredholm de première espèce sont mal posés. Rappelons que la forme générale en est (pour des fonctions à support et à valeur dans \mathbb{R})

$$g \text{ étant donnée, Trouver } f(y) \text{ sur l'intervalle } I \text{ telle que : } \int_I k(x, y) f(y) dx = g(x) \forall x \in J$$

Tout d'abord, l'examen de cette équation montre que la fonction g possède une régularité liée à celle de k . Par exemple, si k est continu et f intégrable, alors g est nécessairement continue. Ainsi, **l'existence de solution n'est pas assurée**, en particulier si la donnée g est trop irrégulière. La condition i) de Hadamard n'est donc pas satisfaite. Sur le plan pratique néanmoins, ce point n'est pas le plus gênant. En effet, la donnée g étant connue de façon approchée, il est souvent loisible (et parfois nécessaire pour pouvoir travailler avec cette donnée) de l'approcher par une fonction régulière très proche, voire quasiment indiscernable, de la donnée originale.

⁵ On voit clairement que si l'on peut trouver un sous espace Z de X , *compact* et sur lequel K est continu et injectif, alors le problème $(K, Z, K(Z))$ est bien posé. Cependant, lorsqu'elle est possible, cette méthode est souvent très artificielle quant à son interprétation physique.

Tournons nous maintenant vers la question de **l'unicité de la solution** (condition ii) d'Hadamard). Le contre-exemple suivant montre que l'examen du noyau $k(x,y)$ est une préoccupation qu'il est bon d'avoir avant de se lancer dans la résolution d'un problème que l'on a pu formuler via une équation de Fredholm de première espèce.

Dans cet exemple :

- le noyau de l'équation est $k(x,y) = x \sin y$
- l'équation est posée sur les segments $I = J = [0, \pi]$
- la donnée g est $g(x) = x$

$$\text{soit :} \quad \int_0^\pi k(x,y)f(y)dy = x$$

Une solution de cette équation est bien sûr la fonction constante $f(y) = 1/2$, mais toutes les fonctions de la forme $f_n(y) = 1/2 + \sin ny$, avec n entier sont aussi solutions. L'opérateur linéaire K défini par la noyau k , possède un noyau⁶, c'est à dire qu'il existe un sous-espace de fonctions annulant K , ici ce sont les fonctions orthogonales à la fonction sinus, pour le produit scalaire de $L^2(J)$:

$$\varphi \in \text{Ker } K \quad \Leftrightarrow \quad K\varphi = x \int_0^\pi \varphi(y) \sin y dy = 0$$

Cependant, la plus sérieuse difficulté rencontrée dans la résolution des équations de Fredholm de première espèce tient surtout à la *non continuité de sa solution vis à vis de la donnée* (condition iii) d'Hadamard). En effet, de façon générale cette équation est très sensible aux données oscillantes. Dès que le noyau k est de carré intégrable, alors le lemme de Lebesgue permet de s'assurer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi k(x,y) \sin ny dy = 0$$

Or, l'équation de Fredholm étant linéaire, on a :

$$\int_0^\pi k(x,y) \left[f(y) + \frac{1}{\varepsilon} \sin ny \right] dy = g(x) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\pi k(x,y) \sin ny dy$$

Ceci exprime que la fonction $\tilde{f}(y) = f(y) + \frac{1}{\varepsilon} \sin ny$ est la solution de l'équation considérée, pour la donnée $\tilde{g}(x) = g(x) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\pi k(x,y) \sin ny dy$. Cependant, pour tout ε , l'écart entre les données g et \tilde{g} peut être rendu arbitrairement petit dès que l'on augmente n (d'après le lemme de Lebesgue) puisque :

$$\|g - \tilde{g}\| = \frac{1}{\varepsilon} \left\| \int_0^\pi k(x,y) \sin ny \right\|$$

alors que l'écart entre les solutions f et \tilde{f} est lui indépendant de n :

$$\|f - \tilde{f}\| = \frac{1}{\varepsilon} \|\sin ny\| = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\int_0^\pi \sin^2 ny dy} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

⁶ Le lecteur attentif aura compris qu'il y a noyau (de l'intégrale) et noyau (d'un opérateur linéaire). En anglais la distinction existe : k est le « kernel » de l'opérateur intégral, son noyau $\text{Ker } K$ au sens d'un opérateur linéaire est de façon plus imagée qu'en français le « nullspace »

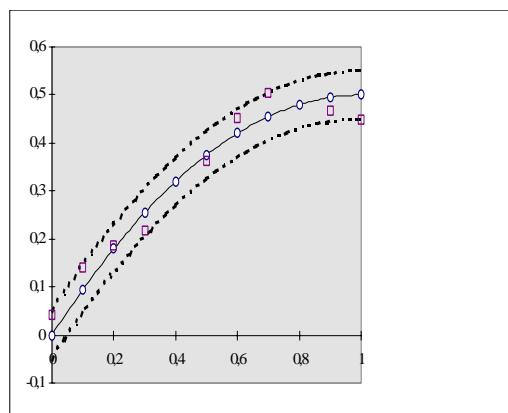
Ainsi **il ne peut y avoir continuité de la solution vis à vis des données** : une variation arbitrairement petite des données (ε petit, mais n suffisamment grand) pouvant conduire à une variation arbitrairement grande de la solution (ε petit).

Cet exemple n'est pas si artificiel qu'il n'y paraît peut-être au premier abord. En effet, supposons que la donnée g soit connue par sa valeur en N points régulièrement espacés sur le segment $[0, \pi]$ et que sa mesure soit entachée d'une incertitude η . Si on note g_m la fonction qui prend la valeur médiane obtenue au milieu de la barre d'incertitude pour tous les points de mesure, alors toutes les fonctions du type :

$$\tilde{g}(x) = g_m(x) + \eta \sin(Nx + \phi)$$

où ϕ est un angle quelconque

peuvent être considérées comme des données « équivalentes » à g_m pour le système de mesure employé.



Mesure avec incertitudes :
o mesures g , mesures avec bruit \tilde{g}

Il faut donc retenir que la résolution des équations de Fredholm de première espèce nécessite donc *toujours* une régularisation. Lors de la construction d'une méthode de résolution, on peut parfois passer à côté de la difficulté dans la première phase de mise au point si l'on utilise ce qu'on appelle des *données synthétiques* pour tester l'efficacité de la méthode. Des données sont synthétiques lorsqu'elles sont obtenues par la résolution du problème direct associé au problème inverse que l'on souhaite traiter. C'est une façon simple d'obtenir des données et de vérifier la capacité à les retrouver pour la technique d'inversion que l'on construit. Cependant, ces données étant en général peu bruitées, hormis par la précision des calculs qui les ont produites, on ne testera pas en général la robustesse de la méthode d'inversion retenue. Cette robustesse sera cependant essentielle dès que l'on s'attachera à traiter des données réelles. *La règle d'or est donc de toujours bruite les données synthétiques si on les utilise.* Bien qu'il soit souvent ardu d'introduire un bruit « réaliste », cela permet de faire apparaître les « vraies » difficultés de la résolution.

Pour revenir un moment sur l'exemple de l'identification de la loi de comportement cisaillement distorsion de l'exemple N°1, signalons que l'équation de Volterra de première espèce est souvent considérée comme « plus stable » que celle de Fredholm : si les difficultés associées sont de même type, elles sont cependant amoindries.

Pour clore cette analyse de l'équation de Fredholm de première espèce, notons enfin que tous les problèmes formulés par une équation intégrale ne sont pas mal posés. Un cas particulier important est celui des problèmes associés à une *équation de Fredholm de seconde espèce*, qui s'écrit :

$$g \text{ étant donnée, Trouver } f(x) \text{ sur l'intervalle } I \text{ telle que : } \int_I k(x, y) f(x) dx + \alpha f(y) = g(y) \quad \forall y \in J$$

et qui sont eux bien posés pour toute valeur de α strictement positive, si k est positif. Vue la similitude des équations de première et de seconde espèce, on peut être alors tenté d'utiliser cette propriété pour régulariser le problème initial en l'approchant par cette équation pour des valeurs « petites » du paramètre α . Cette possibilité sera effectivement utilisée dans les méthodes de régularisation de Tikhonov abordées plus loin.

2.2.2. Opérateur de Dirichlet-Neuman

Nous avons rencontré cet opérateur dans la recherche de cavités, de fissures, ou dans la détermination de paramètres physiques comme la conductivité thermique, à partir de données surabondantes sur le bord du solide auquel on s'intéresse.

On va illustrer le caractère mal posé des problèmes inverses formulés à l'aide de cet opérateur.

Commençons par un exemple très simple (et intuitivement sans grand espoir qu'il soit très utile dans la pratique !) : celui de la détermination de la répartition des modules de Young d'un matériau hétérogène par des essais uniaxiaux de traction simple.

Un barreau de longueur L et de section S est constitué d'un matériau de module $E(x)$. Dans la situation monodimensionnelle considérée ici, les bords du solide sont donc les deux extrémités $x = 0$ et $x = L$.

Si l'on néglige les forces de masse, l'équation d'équilibre et la loi de comportement élastique conduisent à l'équation suivante, où u est le déplacement axial (constant dans une section du barreau) :

$$\frac{d}{dx} \left[E(x) \frac{du}{dx} \right] = 0 \quad x \in]0, L[\quad (16)$$

tandis qu'aux bords du domaine, on a les équations (ou les définitions) :

$$F_0 = E(x) \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} \quad F_L = E(x) \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} \quad (17)$$

$$u(0) = U_0, \quad u(L) = U_L \quad (18)$$

L'opérateur de Dirichlet-Neuman est donc l'opérateur qui relie les données en déplacement (U_0, U_L) aux données duales en effort (F_0, F_L). Un examen plus attentif montre que :

- l'équation d'équilibre impose que les deux efforts (F_0, F_L) aux extrémités soient égaux puisque

$$\left[E(x) \frac{du}{dx} \right] = cste = F_0 = F_L \quad (19)$$

- le déplacement est déterminé à une translation près, les déplacements $u(x)$ et $u(x) + C$ satisfaisant les équations (16) et (18) pour toute valeur de C .

Ainsi l'opérateur de Dirichlet-Neuman est l'opérateur linéaire reliant la valeur commune F des actions aux extrémités (qui coïncide ainsi avec l'effort normal dans la barre) à la différence des déplacements aux extrémités, $U_L - U_0$ (l'élongation de la barre). Il est donc entièrement déterminé par la valeur de la constante DN telle que:

$$F = DN \times (U_L - U_0)$$

On peut en donner une expression explicite grâce à (19) :

$$DN = \frac{1}{\int_0^L \frac{dx}{E(x)}}$$

Résultat assez intuitif !

On constate donc que le cas monodimensionnel est très « pauvre » : l'opérateur de Dirichlet-Neuman dégénère en un unique scalaire, et laisse peu d'espoir de déterminer le champ $E(x)$ uniquement à partir de la connaissance de DN ! On aura accès uniquement à la moyenne de la souplesse $1/E$. Il n'y a donc pas d'identifiabilité, c'est à dire unicité, pour ce problème : tous les champs de modules ayant même moyenne harmonique sont indiscernables.

Restons encore sur ce cas très simple pour illustrer les questions de stabilité de l'opérateur de Dirichlet-Neuman.

Considérons un barreau de module homogène $E(x) = E$ et la famille de barreaux de modules variables en espace :

$$E_n(x) = \frac{2E}{2 + \cos \frac{n\pi x}{L}}$$

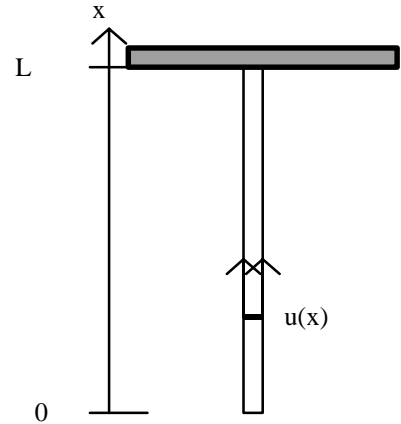
soumis à une force de masse connue noté K . Si les barreaux sont fixés en $x = L$,

$$\frac{d}{dx} \left[E(x) \frac{du}{dx} \right] = K$$

Les solutions en déplacement pour une force nulle exercée à l'extrémité $x = 0$ sont respectivement :

$$u_0(x) = \frac{kx^2}{2} - \frac{kL^2}{2} \quad \text{où } k = K/E$$

$$u_n(x) = \frac{kx^2}{2} + \frac{kx \sin \frac{n\pi x}{L}}{2 \frac{n\pi}{L}} + \frac{k \cos \frac{n\pi x}{L}}{2 \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2} - \frac{kL^2}{2} - \frac{k(-1)^n}{2n^2}$$



Examinons les valeurs des déplacements et des efforts aux extrémités :

$x = 0$ $u_0(0) = -\frac{kL^2}{2}$ $F_{00} = E(x) \frac{du}{dx} \Big _{x=0} = 0$	$u_n(0) = -\frac{kL^2}{2} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} \right]$ $F_{0n} = 0$	$x = L$ $u_0(L) = 0$ $F_{0L} = KL$	$u_n(L) = 0$ $F_{nL} = KL$
--	--	--	-------------------------------

Les opérateurs de Dirichlet-Neuman pour les deux solides sont très proches :

$$DN : [u(L) - u(0)] \rightarrow F_L$$

$$DN_0 : U \rightarrow F_{0L} = U \frac{2E}{L}$$

$$DN_n : U \rightarrow F_{nL} = U \frac{2E}{L} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} \right]$$

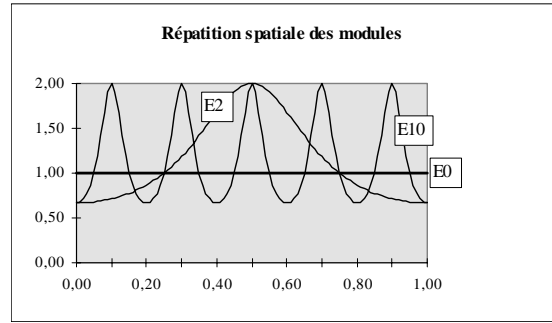
Et donc⁷ la suite d'opérateurs DN_n converge :

$$\|DN_0 - DN_n\| = \frac{1}{n^2 \pi^2} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

⁷ On rappelle que pour un opérateur linéaire : $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$

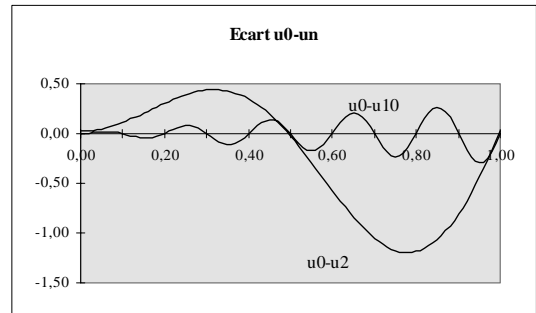
alors que les champs de modules élastiques $E_n(x)$ ne convergent pas vers E :

- en chaque point x_0 , le module $E_n(x_0)$ n'a pas de limite : $\|E_n - E\|_{L^\infty} = \frac{E}{2}$
- la norme L^2 de l'écart entre E_n et E est constante : $\|E_n - E\|_{L^2} = 0,47979 L E$

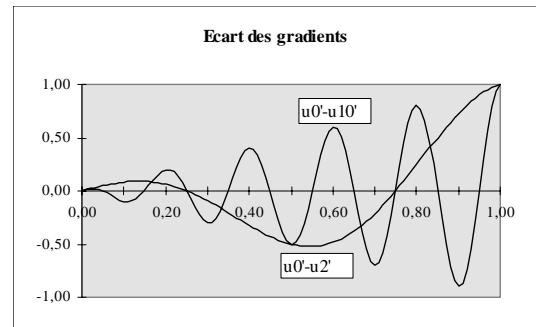


On pourra remarquer ici que les champs u_n convergent vers u_0 pour la norme de $L^2(]0,L[)$ mais pas pour celle de $H^1(]0,L[)$ qui est la norme⁸ naturellement attachée aux solutions de l'équation (16).

$$\bullet \quad \|u_n - u_0\|_{L^2} = \frac{L}{2n^2\pi^2} \sqrt{\frac{2n^2\pi^2 - 18\cos(n\pi)^2 + 15}{3}}$$



$$\bullet \quad \|u'_n - u'_0\|_{L^2} = \frac{L}{2} \sqrt{2 + \frac{6\cos(n\pi)^2}{n^2\pi^2} - \frac{3}{n^2\pi^2}}$$



Terminons cette rapide analyse des difficultés à prévoir lors de l'utilisation de l'opérateur de Dirichlet-Neuman par un autre contre-exemple en dimension deux cette fois. Nous allons montrer que si l'on recherche à identifier le tenseur de conductivité \mathbf{K} d'un matériau hétérogène à partir de l'opérateur de Dirichlet Neuman(problème DN3), alors il existe une infinité de solution c'est à dire de champs de tenseur $\mathbf{K}(x)$. Plus précisément, nous allons construire une famille infinie de champs de tenseurs $\mathbf{K}(x)$ conduisant au même opérateur de Dirichlet-Neuman, c'est à dire pour lesquels imposer la température sur le bord du domaine Ω nécessitera d'imposer le même flux de chaleur sur le bord, quelque soit l'élément considéré de la famille.

Considérons les deux problèmes à température imposé T^m sur le bord $\partial\Omega$, l'un pour un solide isotrope de conductivité $k(x)$, l'autre pour un solide anisotrope de tenseur conductivité $\mathbf{K}(x)$:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k\nabla T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ T = T^m & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{K}\cdot\nabla\hat{T}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \hat{T} = T^m & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{où } (\mathbf{K}\cdot\mathbf{U})_i = K_{ij} U_j \quad (20)$$

⁸ $\|f\|_{H^1}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2$

Les opérateurs de Dirichlet-Neuman DN_k et DN_K des deux solides coïncideront si pour toute donnée T^m , les flux de chaleur sont identiques sur le bord du domaine géométrique Ω :

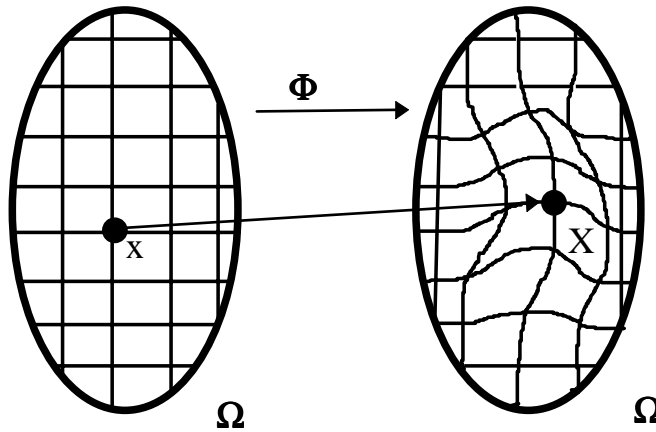
$$\forall T^m, q \equiv k \nabla T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{K} \cdot \nabla \hat{T} \cdot \mathbf{n} \equiv \hat{q} \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Pour construire une famille de tenseurs $\mathbf{K}(x)$, rappelons tout d'abord la formulation faible de l'équilibre thermique dans les deux solides :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} k \nabla T \nabla \varphi &= 0 && \text{pour toute fonction } \varphi \text{ telle que } \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \\ \int_{\Omega} K \cdot \nabla \hat{T} \nabla \varphi &= 0 && \text{pour toute fonction } \varphi \text{ telle que } \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned}$$

Considérons alors une transformation régulière Φ du domaine Ω (un difféomorphisme), laissant le bord invariant :

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \Omega &\rightarrow \Phi(\Omega) \\ (x_i) &\rightarrow (X_i) = (\Phi_1(x_i)) \end{aligned} \quad \text{avec } \Phi_1(x_i) = x_i \text{ si } (x_i) \in \partial\Omega$$



Pour T^m donnée, et donc pour T solution du problème d'équilibre thermique dans le solide de conductivité k , posons :

$$\hat{T}(X) = T(\Phi^{-1}(X))$$

(les températures T et \hat{T} sont les mêmes aux points images l'un de l'autre par la transformation Φ)

Examinons les propriétés du champ \hat{T} .

a) Sur le bord $\partial\Omega$, T et \hat{T} coïncident puisque Φ y est l'identité, leur valeur est donc T^m .

b) Les gradients de T et \hat{T} sont liés par : $T_{,i} = [\hat{T}(\Phi(x))]_{,i} = \hat{T}_{,l} \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_i}$, par ailleurs $d\Omega_\Phi = |\det D\Phi| d\Omega$

si bien que l'on a l'égalité suivante pour toute fonction φ :

$$\int_{\Omega} k(x) \nabla T \nabla \varphi = \int_{\Phi(\Omega)} \hat{k}(X) \sum_i \hat{T}_{,i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} \hat{\varphi}_{,j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} \frac{d\Omega_\Phi}{|\det D\Phi|} = \int_{\Phi(\Omega)} K(X) \cdot \nabla_X \hat{T} \nabla_X \hat{\varphi} d\Omega_\Phi$$

où \mathbf{K} est le tenseur symétrique :

$$K(X)_{ll} = \frac{k(\Phi^{-1}(X))}{|\det D\Phi|} \sum_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i}$$

c) on en déduit les deux résultats suivants :

i) $\int_{\Omega} K \cdot \nabla \hat{T} \nabla \varphi = 0$ pour toute fonction φ telle que $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$, puisque $\int_{\Omega} k \nabla T \nabla \varphi = 0$

ce qui prouve que \hat{T} est la température d'équilibre dans le solide de conductivité \mathbf{K} , auquel on impose la température T^m sur le bord (grâce à a)).

ii) par intégration par parties de chaque membre de l'égalité : $\int_{\Phi(\Omega)} K \cdot \nabla \hat{T} \nabla \hat{\varphi} = \int_{\Omega} k \nabla T \nabla \varphi$

et en utilisant le fait que, sur le bord, φ et $\hat{\varphi}$ coïncident :

$$\int_{\partial\Omega} (k \nabla T \cdot n - K \cdot \nabla \hat{T} \cdot n) \varphi = 0 \text{ pour toute fonction } \varphi$$

cette égalité montre que les flux q et \hat{q} sont égaux.

Ainsi tout difféomorphisme Φ conduit à un tenseur de conductivité \mathbf{K} pour lequel l'opérateur de Dirichlet-Neuman est exactement celui de la conductivité isotrope $k(x)$ (ou du tenseur $k(x)\mathbf{I}$). **La condition ii) d'Hadamard n'est donc pas satisfaite** si l'on autorise des tenseurs de conductivité quelconques dans la formulation du problème inverse via l'opérateur de Dirichlet-Neuman.