

# Study of the $c$ -join operation

Vivien Ducros<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ENS Paris-Saclay – work done at i3S, Université Côte d’Azur computer science laboratory  
Presenting author e-mail : vivien.ducros@ens-paris-saclay.fr

*Cellular automata* are computational models widely studied in mathematics and in fundamental computer science. They find applications in physics and in biology, simulating the evolution of a set of *cells* through simple rules. These rules indicate how the state (dead or alive) of a cell evolves at next generation, considering the current state of surrounding cells. The *configuration* of a cellular automaton is the assignment of a state to each cell at a certain generation.

The *maximal attractor* of a cellular automaton is the set of all configurations reachable from any number of generations. It can express properties of a cellular automaton. In the case of one-dimensional cellular automata and under certain restrictions, an algorithm computing the maximal attractor has been defined in [1]. In order to do so, this article introduces a new operator named  $c$ -join.

A *subshift* is a set of configurations of a one-dimensional cellular automaton respecting certain properties (see [2]). It can be described by a set of *forbidden words* which are the patterns that do not appear in the subshift configurations. The  $c$ -join of two subshifts (denoted  $\overset{c}{\vee}$ ) is their union, to which are added the configurations obtained by joining the configurations of the subshifts on a pattern of length  $c$  (Figure 1).

We then ask ourselves the following question: **Can we determine a set of forbidden words of the subshift obtained by the  $c$ -join of two subshifts ?**

To answer this question, we try to construct the patterns that cannot appear in the  $c$ -join configurations. Then we must prove that they describe the  $c$ -join subshift.

We were able to characterize the forbidden words of the  $c$ -join. These are the words that contain two forbidden words  $\alpha$  and  $\beta$  of the subshifts to join, such as  $\beta$  is after  $\alpha$ , or precedes it with a lead at most  $c$  (Figure 2).

**Keywords :**  $c$ -join, subshifts, dynamical systems, cellular automata.

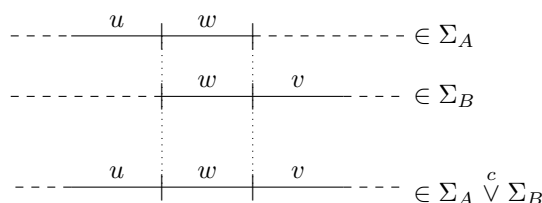


FIGURE 1 – Join of configurations of subshifts  $\Sigma_A$  and  $\Sigma_B$  ( $w$  of length  $c$ )

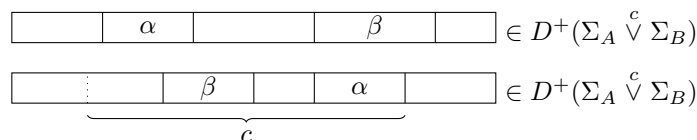


FIGURE 2 – Forbidden words of  $c$ -join

**Supervisors :** Enrico Formenti and Sandrine Julia, i3S laboratory – Université Côte d’Azur

## References

- [1] E. Formenti and P. Kůrka. *A search algorithm for the maximal attractor of a cellular automaton*, in STACS 2007, pages 356–366, Springer Berlin Heidelberg.
- [2] D. Lind and B. Marcus. *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, 1995, Cambridge University Press.

# Étude de l'opération de $c$ -jointure

Vivien Ducros<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ENS Paris-Saclay – travail réalisé à l'i3S, laboratoire d'informatique de l'Université Côte d'Azur  
Presenting author e-mail : vivien.ducros@ens-paris-saclay.fr

Les *automates cellulaires* sont des modèles de calcul largement étudiés en mathématiques et en informatique fondamentale. Ils trouvent des applications en physique et en biologie en simulant l'évolution d'un ensemble de *cellules* grâce à des règles simples. Celles-ci indiquent comment évolue à la génération suivante l'état (vivante ou morte) d'une cellule, en considérant l'état actuel des cellules qui l'entourent. La *configuration* d'un automate cellulaire est la donnée des états de toutes ses cellules à une certaine génération.

L'*ensemble maximal attracteur* d'un automate cellulaire est l'ensemble des configurations que l'on peut obtenir après un nombre quelconque de générations. Il permet d'exprimer des propriétés d'un automate cellulaire. Dans le cas des automates cellulaires unidimensionnels et sous certaines conditions, un algorithme permettant de calculer cet ensemble a été défini dans [1]. En particulier, cet article introduit une nouvelle opération nommée  $c$ -jointure.

Un *sous-décalage* est un ensemble de configurations d'un automate cellulaire unidimensionnel respectant certaines propriétés (voir [2]). Il peut être décrit par un ensemble de *mots interdits* qui sont les motifs qui n'apparaissent pas dans les configurations du sous-décalage. La  $c$ -jointure de deux sous-décalages (notée  $\overset{c}{\vee}$ ) est leur union, à laquelle on ajoute les configurations obtenues par jonction des configurations des sous-décalages sur un motif de longueur  $c$  (Figure 3).

Nous nous posons alors la question suivante : **Peut-on déterminer un ensemble de mots interdits du sous-décalage obtenu par  $c$ -jointure de deux sous-décalages ?**

Pour répondre à cette question, nous avons cherché à construire les motifs ne pouvant pas apparaître dans les configurations de la  $c$ -jointure. Il faut ensuite montrer qu'ils permettent de décrire la  $c$ -jointure. Ainsi, nous avons pu caractériser les mots interdits de la  $c$ -jointure. Ce sont les mots qui contiennent deux mots interdits  $\alpha$  et  $\beta$  des sous-décalages à joindre, tel que  $\beta$  se situe après  $\alpha$ , ou alors avec une avance d'au plus  $c$  sur  $\alpha$  (Figure 4).

**Mots-clés :**  $c$ -jointure, sous-décalages, systèmes dynamiques, automates cellulaires.

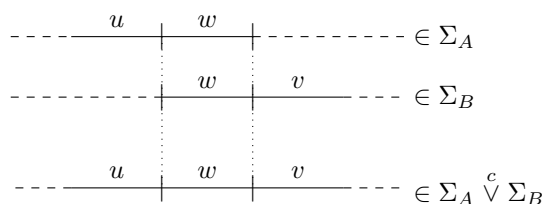


FIGURE 3 – Jonction de configurations des sous-décalages  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$  ( $w$  de taille  $c$ )

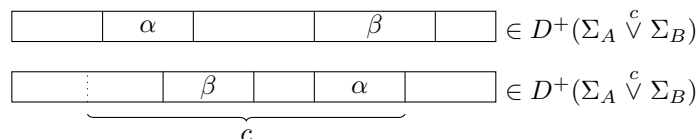


FIGURE 4 – Mots interdits de la  $c$ -jointure

**Encadrants :** Enrico Formenti et Sandrine Julia, Laboratoire i3S – Université Côte d'Azur

## Références

- [1] E. Formenti and P. Kůrka. *A search algorithm for the maximal attractor of a cellular automaton*, in STACS 2007, pages 356–366, Springer Berlin Heidelberg.
- [2] D. Lind and B. Marcus. *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*, 1995, Cambridge University Press.