

Examen - Mardi 3 janvier 2006  
 Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Les exercices et le problème sont indépendants. Les calculatrices sont fournies.

Exercice I Système du 3<sup>e</sup> ordre

On considère le système décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p + 10}{p(p + \alpha)(p + \beta)}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres réels non nuls ( $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0$ ).

- I.1) Déterminez les pôles et zéros du système. Que dire de la stabilité du système ? Justifiez.
- I.2) En vous appuyant sur la méthode présentée en cours, retrouvez la représentation d'état du système sous forme canonique de commandabilité en détaillant la méthode.
- I.3) Le système mis sous forme d'état est-il commandable ? Justifiez votre réponse.
- I.4) Pour quelles valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  le système est-il observable ?
- I.5) Établir le schéma de simulation associé à la représentation d'état canonique de commandabilité.

Exercice II Système multivariable

On considère la représentation d'état d'un système multivariable d'ordre  $n$ , à  $m$  entrées scalaires indépendantes et  $p$  sorties scalaires distinctes, s'écrit sous forme compacte :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (1)$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $u = [u_1, \dots, u_m]^T \in \mathbb{R}^m$  et  $y = [y_1, \dots, y_p]^T \in \mathbb{R}^p$ .  
 Le système (1) s'écrit aussi de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \sum_{k=1}^m b_k u_k, \\ y_i = c_i x \quad i \in [1, p], \end{cases} \quad (2)$$

avec  $b_k$  ( $k \in [1, m]$ ) et  $c_i$  ( $i \in [1, p]$ ) matrices de tailles appropriées.

Soient  $A = \begin{bmatrix} -11 & 3 & 0 \\ -18 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -11 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$  et  $C = [2 \quad -1 \quad 1]$ , les matrices du modèle d'état du

système (1) d'un système multivariable.

II.1) Quelles sont les caractéristiques de ce système (ordre  $n$ , nombre d'entrée(s)  $m$  et nombre de sortie(s)  $p$ ) ? Déterminez les différentes matrices  $b_k$  et  $c_i$ .

II.2) Quels sont les modes de ce système ?

II.3) Montrez que le système est observable.

Le système multivariable (2) est dit *commandable* par la seule entrée  $u_k$  si la paire  $(A, b_k)$  est commandable.

II.4) Montrez que le système n'est pas contrôlable par l'une des entrées et précisez laquelle en justifiant.

PROBLÈME I

Étude d'un servomoteur

Un *servomoteur* est un moteur électrique équipé d'un système de commande, conçu pour générer le mouvement précis d'un élément mécanique à partir d'une consigne externe au système dont il fait partie. Un tel système est appelé *servomécanisme*. Les applications sont nombreuses : commande du mouvement d'orientation des radars, des radio-télescopes, des projecteurs lumineux ...

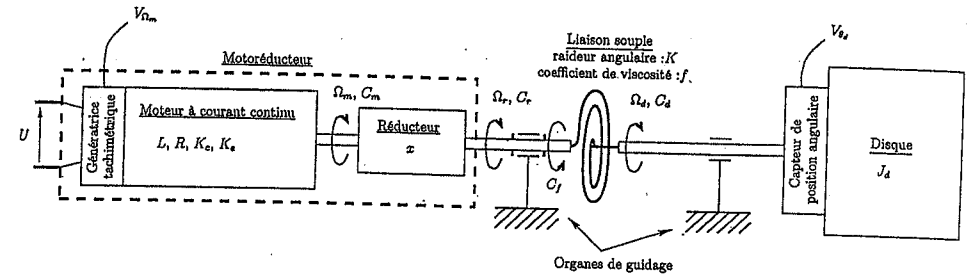


FIG. 1 - Schéma du servomécanisme.

Dans ce problème, on s'intéresse au servomécanisme illustré par la figure 1. L'objectif est de concevoir une loi de commande permettant d'asservir la position angulaire d'un disque en rotation autour d'un axe fixe grâce à un *motoréducteur* composé d'un moteur à courant continu et d'un réducteur de vitesse.

PARTIE A: Modélisation

Le système considéré est composé d'un disque en rotation autour d'un axe fixe et de moment d'inertie  $J_d$ . Un motoréducteur entraîne le disque en rotation grâce à une liaison souple de raideur  $K$  et de viscosité  $f$ . Les paramètres physiques du motoréducteur, de la liaison souple et du disque sont précisés dans le tableau 1.

Le réducteur a un rendement parfait. Il est caractérisé par la relation cinématique (3) liant les vitesses angulaires  $\Omega_m$  et  $\Omega_r$ . Le moment d'inertie équivalent de l'ensemble motoréducteur, ramené à la sortie du réducteur, est noté  $J$  et il est donné par la relation (4).

$$\Omega_r(t) = \frac{1}{x} \Omega_m(t), \quad (3)$$

$$J = x^2 J_m + J_r. \quad (4)$$

Le comportement électrique du moteur est caractérisé par les équations (5) à (7)

$$U(t) = RI(t) + L\dot{I}(t) + E(t), \quad (5)$$

$$C_m(t) = K_c I(t), \quad (6)$$

$$E(t) = K_e \Omega_m(t), \quad (7)$$

où  $U(t)$  est la tension de commande du moteur,  $I(t)$  le courant qui circule dans l'induit et  $E(t)$  la force contre-électromotrice. Le guidage en rotation est assuré par des liaisons pivot créant un couple résistant global noté  $C_f$ , dû au frottement sec. Le principe fondamental de la dynamique appliqué d'abord au rotor entraînant le disque puis au rotor «équivalent» de l'ensemble motoréducteur conduit aux équations de mouvement (8) et (9),

$$J_d \ddot{\theta}_d(t) = K (\theta_r(t) - \theta_d(t)) + f (\dot{\theta}_r(t) - \dot{\theta}_d(t)), \quad (8)$$

$$J \ddot{\theta}_r(t) = x C_m(t) - K (\theta_r(t) - \theta_d(t)) - f (\dot{\theta}_r(t) - \dot{\theta}_d(t)) - C_f(t), \quad (9)$$

où  $\theta_m(t)$ ,  $\theta_r(t)$  et  $\theta_d(t)$  sont les positions angulaires des rotors du moteur, du réducteur et du disque avec :

$$\Omega_m(t) = \dot{\theta}_m(t), \quad \Omega_r(t) = \dot{\theta}_r(t) \quad \text{et} \quad \Omega_d(t) = \dot{\theta}_d(t). \quad (10)$$

A.1) On pose  $\tilde{\theta}(t) = \theta_r(t) - \theta_d(t)$ . Déterminez la représentation d'état du système en fonction du vecteur d'état  $Q = [\tilde{\theta} \ \dot{\tilde{\theta}} \ \theta_d \ \dot{\theta}_d \ I]^T$  et du vecteur d'entrée  $e(t) = [U(t) \ C_f(t)]^T$  sous la forme :

$$\dot{Q}(t) = A Q(t) + B e(t), \quad (11)$$

où  $B = [B_U \ B_{C_f}]$ ,  $B_U$  et  $B_{C_f}$  étant des vecteurs colonnes. Faire l'application numérique (attention aux unités des différentes constantes).

A.2) Le système (11) est dit *commandable par  $U(t)$*  (respectivement par  $C_f(t)$ ) si la paire  $(A, B_U)$  (respectivement  $(A, B_{C_f})$ ) est commandable. Le système est-il commandable par  $U(t)$ ? Même question avec  $C_f(t)$ .

A.3) On désigne par  $y$  la sortie du système correspondant à la tension du capteur de position angulaire,  $y(t) = V_{\theta_d}(t)$ . Donnez la relation entre  $V_{\theta_d}(t)$  et  $\theta_d(t)$ . En déduire la matrice d'observation du système.

A.4) Le système est-il observable par cette sortie?

### PARTIE B: Commande par retour d'état

Dans la suite, on considère que l'entrée  $C_f(t)$  est toujours nulle. La fonction de transfert du système  $\frac{V_{\theta_d}(p)}{U(p)} = G(p)$ , après application numérique et factorisation, s'écrit :

$$G(p) = \frac{6,565 \cdot 10^5 (p + 6000)}{p(p + 2339)(p + 59,95)(p^2 + 6,296p + 3,060 \cdot 10^4)} \quad (12)$$

B.1) Mettre la fonction de transfert (12) sous forme d'état canonique commandable

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c U(t) \\ V_{\theta_d}(t) = C_c x_c(t) \end{cases} \quad (13)$$

B.2) En supposant que l'état du système (13) est entièrement mesurable, déterminez la matrice  $K$  de la loi de commande par retour d'état  $U(t) = -K x_c(t) + \eta r_{\theta}(t)$ , pour que le système en boucle fermée ait les caractéristiques suivantes :

- deux pôles complexes conjugués avec un coefficient d'amortissement  $\zeta = 0,8$  et une pulsation propre  $\omega_0 = 220 \text{ rad/s}$ ,
  - trois pôles non dominants à  $p = -1250$ ,  $p = -2200$  et  $p = -3150$ ,
- $r_{\theta}(t)$  étant la consigne de position angulaire à suivre par le système asservi et  $\eta$  est une constante.

### PARTIE C: Observateur

Le vecteur d'état du système (13) n'étant pas mesurable, on souhaite concevoir un observateur afin d'appliquer la loi de commande précédente utilisant l'état estimé  $\hat{x}_c(t)$  :  $U(t) = -K \hat{x}_c(t) + \eta r_{\theta}(t)$ .

C.1) Rappelez l'équation d'un observateur, avec  $L$  la matrice du gain d'estimation de cet observateur.

C.2) Déterminez  $L$  telle que la dynamique de l'observateur soit deux fois plus rapide que celle du système commandé par retour d'état.

C.3) Déterminez l'expression du coefficient  $\eta$  permettant d'avoir, en boucle fermée, une fonction de transfert  $\frac{\theta_d(p)}{r_{\theta}(p)}$  de gain statique unitaire.

PARAMÈTRE PHYSIQUE	CONSTANTE	VALEUR
Raideur de la liaison souple	$K$	$60 \text{ Nm/rad}$
Coefficient de viscosité de la liaison souple	$f$	$10^{-2} \text{ Nm/(rad.s}^{-1}\text{)}$
Moment d'inertie du disque	$J_d$	$20 \cdot 10^3 \text{ g.cm}^2$
Moment d'inertie du rotor du moteur	$J_m$	$100 \text{ g.cm}^2$
Moment d'inertie du rotor du réducteur	$J_r$	$50 \text{ g.cm}^2$
Rapport de réduction	$\alpha$	96
Résistance de l'induit	$R$	$1,8 \ \Omega$
Coefficient d'auto-induction de l'induit	$L$	$0,75 \text{ mH}$
Constante de couple	$K_c$	$0,033 \text{ Nm/A}$
Constante de f.c.e.m	$K_e$	$3,4 \text{ V/(1000 tr/min)}$
Gain du capteur de position	$K_{\theta}$	$0,5 \text{ V/10}^\circ$

TAB. 1 - Données du servomécanisme.

exercice I Système du 3<sup>e</sup> ordre

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p+10}{p(p+\alpha)(p+\beta)}, \quad \alpha \neq 0, \beta \neq 0$$

I.1) pôles du système :  $p_1=0, p_2=-\alpha, p_3=-\beta$   
 zéro du système :  $z_1=-10$

Le système est toujours instable à cause de  $p_1=0$ .

I.2)  $H(p) = \frac{p+10}{p^3+(\alpha+\beta)p^2+\alpha\beta p} = \frac{Y(p)}{U(p)}$

On introduit  $V(p)$  tel que  $H(p) = \frac{Y(p)}{V(p)} \cdot \frac{V(p)}{U(p)}$  où  $\frac{Y(p)}{V(p)} = p+10$  et  $\frac{V(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^3+(\alpha+\beta)p^2+\alpha\beta p}$

Ainsi,  
 $p^3 V(p) + (\alpha+\beta)p^2 V(p) + \alpha\beta p V(p) = U(p)$  *Transf. de Laplace inverse*  
 $\frac{d^3 v}{dt^3} + (\alpha+\beta) \frac{d^2 v}{dt^2} + \alpha\beta \frac{dv}{dt} = u(t)$  *+ C.I. nulles*

de même,  
 $Y(p) = p V(p) + 10 V(p)$  *Transf. de Laplace inverse*  
 $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt} + 10 v(t)$  *+ C.I. nulles*

On pose  $\begin{cases} x_1 = v \\ x_2 = \frac{dv}{dt} \\ x_3 = \frac{d^2 v}{dt^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{dv}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2 v}{dt^2} = x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = \frac{d^3 v}{dt^3} = -(\alpha+\beta)x_3 - \alpha\beta x_2 + u(t) \end{cases}$

et  $y(t) = x_3(t) + 10 x_1(t)$

ce qui donne la représentation d'état, avec  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ ,  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha\beta & -(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$   $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   $C = [10 \ 1 \ 0]$   $D = 0$

sous forme canonique de commandabilité.

I.3) Si la fonction de transfert  $H(p)$  est minimale (cad qu'il n'y a plus de simplifications pôles/zéros), la forme canonique de commandabilité est, comme vu en cours, toujours commandable.

Or  $H(p)$  est minimale si  $\alpha \neq 10$  ou  $\beta \neq 10$ ,

d'où la condition de commandabilité de la représentation d'état précédente.

I.4) Le système est observable si la matrice d'observabilité est de rang plein.  
 La matrice d'observabilité  $O(A,C)$  vaut  $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$ , ce qui donne :

$$O(A,C) = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & -\alpha\beta & 10-(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

(astuce :  $CA^2 = (CA) \cdot A$ , pas la peine de calculer  $A^2$ !)

Cette matrice est de rang plein si et seulement si son déterminant est non nul.  
 $\det(O(A,C)) = 10 [100 - 10(\alpha+\beta) + \alpha\beta] = 0$

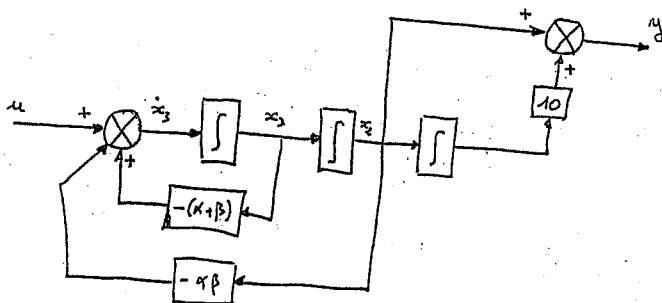
$\Leftrightarrow$  pour  $\alpha \neq 10$  à  $\beta = \frac{100-10\alpha}{10-\alpha} = 10$

$\Leftrightarrow$  pour  $\beta \neq 10$  à  $\alpha = \frac{100-10\beta}{10-\beta} = 10$

Autrement dit, le système est observable si pour  $\alpha \neq 10, \beta \neq 10$  et si pour  $\beta \neq 10, \alpha \neq 10$

Conclusion : Le système est observable si  $\alpha \neq 10$  et  $\beta \neq 10$

I.5) Schéma de simulation associé à la forme canonique de commandabilité.  
 Il se déduit aisément des équations de la représentation d'état



Exercice II Système multivariable

$$A = \begin{bmatrix} -11 & 3 & 0 \\ -18 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -11 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = [2 \quad -1 \quad -1]$$

II.1)  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$   $\rightarrow n=3, m=2, p=1$   
ordre 3, 2 entrées indépendantes, 1 seule sortie.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -11 \\ 3 \end{bmatrix} \quad c_1 = [2 \quad -1 \quad -1]$$

Le système multivariable s'écrit aussi:  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + b_1 u_1 + b_2 u_2 \\ y = c_1 x \end{cases}$

II.2) Les modes du système sont caractérisés par les valeurs propres de la matrice A.  
On les détermine en résolvant  $\det(A - \lambda I_3) = 0$  en la variable  $\lambda$ .

On trouve  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -5$

II.5) Calcul de la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$  (appel:  $CA^2 = (CA) \cdot A$ )

$$\mathcal{O}(A, C) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \det(\mathcal{O}(A, C)) = 6 \text{ donc cette matrice est de rang plein}$$

Le système est donc observable.

II.4) Calcul de la matrice de commandabilité:

$$\mathcal{E}(A, B_i) = [B_i \quad AB_i \quad A^2 B_i]$$

$$\mathcal{E}(A, b_1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \\ -2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$\det(\mathcal{E}(A, b_1)) = 0$ , matrice singulière, de rang <sup>non-plein</sup>

$$\mathcal{E}(A, b_2) = \begin{bmatrix} -5 & 22 & -104 \\ -11 & 46 & -212 \\ 3 & -8 & 30 \end{bmatrix}$$

$\det(\mathcal{E}(A, b_2)) = 48$ , matrice inversible  $\Rightarrow$  de rang plein

Le système est donc incontrôlable par l'entrée  $u_1$

Système - Partie A

A.1)  $\tilde{\theta} = \theta_2 - \theta_1$

(8)  $\rightarrow \ddot{\theta}_1 = \frac{K}{J} \tilde{\theta} + \frac{f}{J} \dot{\theta}_1$

(9)  $\rightarrow \ddot{\theta}_2 = \frac{K}{J} \tilde{\theta} - \frac{K}{J} \theta_1 - \frac{f}{J} \dot{\theta}_1 - \frac{1}{J} C_f$  (2.8.13)

(9.13)  $\rightarrow \ddot{\theta}_2 = \frac{K}{J} \tilde{\theta} - \left(\frac{1}{J} + \frac{1}{J}\right) K \tilde{\theta} - \left(\frac{1}{J} + \frac{1}{J}\right) f \dot{\theta}_1 - \frac{1}{J} C_f$

(3), (5), (6), (7), (8)  $\rightarrow \ddot{\theta}_1 = \frac{-K}{L} \tilde{\theta} - \frac{K}{L} \tilde{\theta}_1 + \frac{1}{L} u$

On pose  $\alpha = \frac{1}{J} + \frac{1}{J}$ .

D'où la représentation d'état

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\theta}} \\ \ddot{\tilde{\theta}} \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{L} & -\frac{K}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K}{J} & \frac{f}{J} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K}{L} & 0 & -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{B_u} u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} C_f \end{bmatrix}}_{B_f} C_f$$

Application numérique:  $\alpha = 5,109 \cdot 10^2 \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,065 \cdot 10^4 & -5,109 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 \cdot 10^4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4,156 \cdot 10^3 & 0 & -4,156 \cdot 10^3 & -2,4 \cdot 10^3 & 0 \end{bmatrix} \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1,333 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \quad B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4,085 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

**! ATTENTION**, utiliser les unités du système international.  
 $J_1 = 2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$   
 $J_2 = 5 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$   
 $J_m = 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$   
 $\Rightarrow J = 9,217 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$   
 $K_e = 3,247 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot (\text{rad/s})^{-1}$   
 $K_\theta = 2,865 \text{ V/rad}$   
 les autres constantes sont exprimées dans les unités du système international.

A.2) Calcul des matrices de contrôlabilité :

$$E(A, B_u) = [B_u \quad AB_u \quad A^2B_u \quad A^3B_u \quad A^4B_u]$$

$$E(A, B_q) = [B_q \quad AB_q \quad A^2B_q \quad A^3B_q \quad A^4B_q]$$

Remarque : pour calculer  $A^2B_u$ , calculer le produit  $A \cdot (AB_u)$ ,  $AB_u$  ayant été calculé précédemment. ensuite calculer  $A^3B_u$  en calculant  $A \cdot (A^2B_u)$  etc....

de même pour calculer  $A^2B_q, A^3B_q$  etc. :

$$E(A, B_u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4,583 \cdot 10^4 & -1,102 \cdot 10^8 & 2,566 \cdot 10^{11} \\ 0 & 4,583 \cdot 10^4 & -1,102 \cdot 10^8 & 2,566 \cdot 10^{11} & -6,001 \cdot 10^{14} \\ 0 & 0 & 0 & 2,732 \cdot 10^5 & 8,238 \cdot 10^8 \\ 0 & 0 & 2,282 \cdot 10^5 & 8,238 \cdot 10^8 & -2,024 \cdot 10^{12} \\ 1,333 \cdot 10^3 & -3,2 \cdot 10^6 & 7,480 \cdot 10^9 & -1,752 \cdot 10^{13} & 4,099 \cdot 10^{16} \end{bmatrix}$$

$\det(E(A, B_u)) = 5,294 \cdot 10^{30} \Rightarrow$  Le système est commandable par  $U$ .

$$E(A, B_q) = \begin{bmatrix} 0 & -1,085 \cdot 10^4 & 5,543 \cdot 10^1 & 4,882 \cdot 10^6 & -3,731 \cdot 10^9 \\ -1,085 \cdot 10^4 & 5,543 \cdot 10^1 & 1,882 \cdot 10^6 & -3,731 \cdot 10^9 & 8,667 \cdot 10^{12} \\ 0 & 0 & -5,425 \cdot 10^1 & -3,252 \cdot 10^5 & 1,109 \cdot 10^8 \\ 0 & -5,425 \cdot 10^1 & -3,252 \cdot 10^5 & 1,109 \cdot 10^8 & 3,781 \cdot 10^{10} \\ 0 & 4,583 \cdot 10^4 & -1,082 \cdot 10^8 & 2,533 \cdot 10^{11} & -5,924 \cdot 10^{14} \end{bmatrix}$$

$\det(E(A, B_q)) = -7,799 \cdot 10^{27} \Rightarrow$  Le système est commandable par  $Q$ .

A.3)  $V_{01}(t) = K_{\theta} \Theta_1(t)$

or le vecteur d'état est  $Q = [\Theta \quad \dot{\Theta} \quad \Theta_1 \quad \dot{\Theta}_1]^T$

donc  $V_{01} = [0 \quad 0 \quad K_{\theta} \quad 0]^T$   $Q = C \cdot Q$

A.4) Calcul de la matrice d'observabilité  $E(A, C) = [C \quad CA \quad CA^2 \quad CA^3 \quad CA^4]^T$

$$E(A, C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2,865 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,865 & 0 \\ 8,594 \cdot 10^4 & 1,432 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ -4,390 \cdot 10^5 & 8,594 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 4,324 \cdot 10^7 \\ -2,632 \cdot 10^9 & -2,924 \cdot 10^6 & 0 & -2,046 \cdot 10^6 & 1,79 \cdot 10^6 \end{bmatrix}$$

$\det(E(A, C)) = 1,082 \cdot 10^{17} \Rightarrow$  Le système est observable par  $V_{01}$

Partie B - Commande par retour d'état

B-1) On développe la fonction de transfert  $G(p)$  pour la mettre sous la forme :

$$G(p) = \frac{b_1 p + b_0}{p^5 + a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p}$$

$b_0 = 3,939 \cdot 10^3, b_1 = 6,565 \cdot 10^5, a_3 = 4,285 \cdot 10^3, a_2 = 7,428 \cdot 10^3, a_1 = 1,858 \cdot 10^5, a_4 = 2,405 \cdot 10^3$   
On trouve :

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_4 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_c = [b_0 \quad b_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

B-2) On cherche  $K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \quad k_5]$  pour que le polynôme caractéristique de la matrice  $A_{cl} = A_c - B_c K$  corresponde au polynôme caractéristique désiré  $P(p) = (p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p^2 + \zeta\omega_0 p + \omega_0^2)$  où  $p_1 = -1250; p_2 = -2200; p_3 = -3450; \zeta = 0,8; \omega_0 = 220$

On trouve :  $k_1 = 4,153 \cdot 10^{14}; k_2 = 3,704 \cdot 10^{12}; k_3 = 1,370 \cdot 10^{10}; k_4 = 1,580 \cdot 10^7; k_5 = 4,547 \cdot 10^3$

Partie C - Observateur

C-1) Equation d'état d'un observateur :  $\dot{\hat{x}}_e = A_e \hat{x}_e + B_e u + L C_e (x_2 - \hat{x}_e)$   
 $= \underbrace{(A_c - L C_c)}_{A_{obs}} \hat{x}_e + B_c u + L C_c x_2$

C-2) On cherche  $L = [l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4 \quad l_5]^T$  pour que le polynôme caractéristique de la matrice  $A_{obs} = A_c - L C_c$  corresponde au polynôme caractéristique désiré  $\hat{P}(p) = (p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)(p^2 + \zeta\omega_0 p + \omega_0^2)$  où  $p_1 = -1250; p_2 = -2200; p_3 = -3450; \zeta = 0,8; \omega_0 = 220$

On trouve :  $l_1 = 1,542 \cdot 10^6; l_2 = 8,223 \cdot 10^3; l_3 = 4,679; l_4 = 7,366 \cdot 10^2; l_5 = 4,995 \cdot 10^5$

C-3) La fonction de transfert du correcteur s'écrit :  $U(p) = \eta C_1(p) \pi_{\theta}(p) - C_2(p) Y(p)$   
où  $C_1(p) = [1 - K(pI - A_{cl})^{-1} B_c]$  et  $C_2(p) = K(pI - A_{cl})^{-1} L$

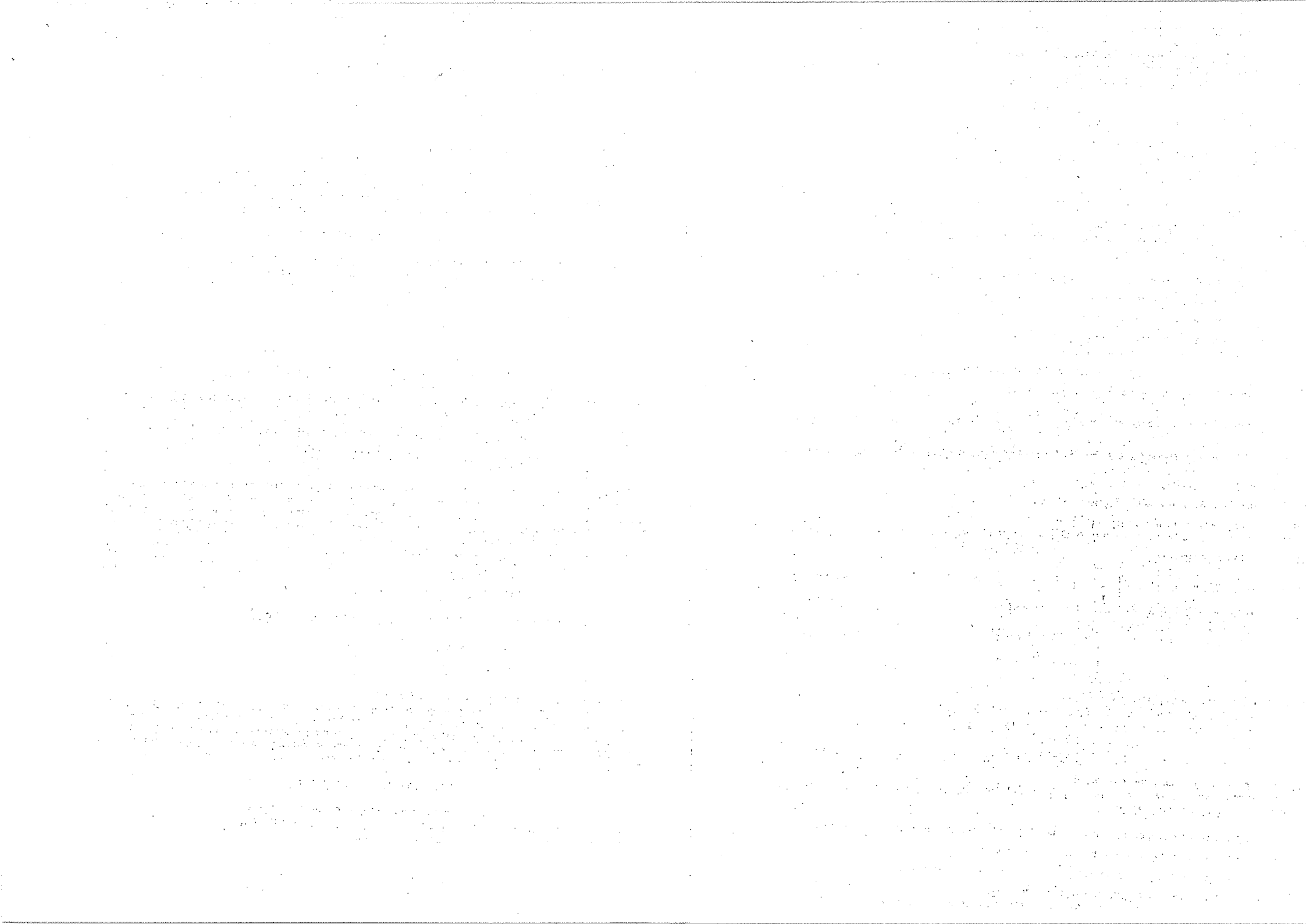
or  $Y(p) = G(p) U(p) = \eta G(p) C_1(p) \pi_{\theta}(p) - G(p) C_2(p) Y(p)$   
donc  $Y(p) = \eta \frac{G(p) C_1(p)}{1 + G(p) C_2(p)} \pi_{\theta}(p)$

Par ailleurs  $Y = K_{\theta} \Theta_1(p)$  d'où

$$\frac{\Theta_1(p)}{\pi_{\theta}(p)} = \eta \frac{G(p) C_1(p)}{1 + G(p) C_2(p)}$$

Le gain statique est obtenu pour  $p=0$

$$\eta = \frac{1 + G(0) C_2(0)}{G(0) C_1(0)} K_{\theta}$$



**Asservissements numériques**  
**Examen partiel du 03 novembre 2005**

Durée : 2 heures

Documents non autorisés

L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes.

Barème approximatif :  
Première partie : 6 points  
Deuxième partie : 14 points

**Première partie : questions de cours**

- Donner et justifier la propriété fondamentale pour les systèmes échantillonnés dans laquelle est définie la notion de filtre numérique.
- Donner la condition générale de stabilité au sens EBSB, ainsi que sa justification partielle.
- Donner l'expression de la transmittance pulsée  $T(z) = \frac{s(z)}{e(z)}$  de l'asservissement, d'entrée  $e$  et de sortie  $s$ , représenté sur la figure 1.

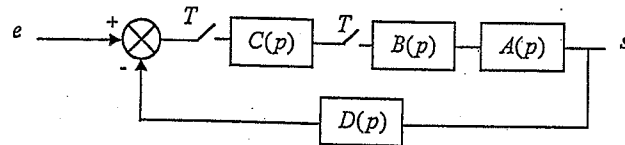


Figure 1

- Ecrire la fonction de transfert  $C(z)$  du correcteur PID, caractérisé par les coefficients  $k_p$ ,  $k_i$  et  $k_d$ , représentant respectivement les actions proportionnelle, intégrale et dérivée.

**Deuxième partie : réglage de correcteur**

On considère l'asservissement de position échantillonné représenté sur la figure 2 ci-dessous :

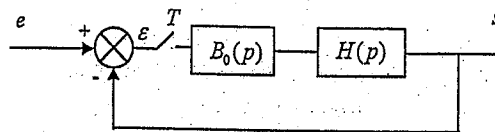


Figure 2

où  $B_0(p)$  représente un bloqueur d'ordre zéro.  $T$  désigne la période d'échantillonnage du signal d'erreur. La transmittance  $H(p)$  est telle que :

$$H(p) = \frac{H_0}{p+a}$$

où les paramètres  $H_0$  et  $a$  sont des grandeurs réelles et positives.

**1. Mise en équation.**

- Déterminer l'expression de la transmittance pulsée de la chaîne directe de l'asservissement, notée  $B_0 \cdot \bar{H}(z)$ , en fonction de  $H_0$ ,  $a$  et  $T$ . On rappelle, dans le tableau 1 ci-dessous, quelques transformées en  $z$  de signaux élémentaires.

Tableau 1. Transformées en  $z$  élémentaires.

$F(p)$	$F(z)$
$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$

- En déduire l'expression de l'erreur de position  $\varepsilon_p$  relative à l'excitation  $E_0 \cdot u(t)$ . Le système est-il précis ?

**2. Etude de la stabilité.**

- Ecrire l'équation caractéristique de l'asservissement. Donner la valeur particulière  $z_1$  de  $z$ , solution de cette équation.
- Rappeler la condition, portant sur  $z_1$ , pour laquelle l'asservissement est stable. En déduire la condition portant sur le gain statique  $H_0$  assurant la stabilité de l'asservissement en boucle fermée.
- Appliquer le critère de Routh-Hurwitz. En déduire la condition de stabilité portant sur  $H_0$ . Quelles remarques peut-on faire ?
- On considère la situation particulière pour laquelle :

$$aT = 1$$

Donner la condition de stabilité, portant sur  $H_0$ .

**3. Etude de la précision dynamique.**

Dans toute la suite du problème, on suppose que l'on règle le gain statique  $H_0$  à la valeur particulière suivante :

$$H_0 = \frac{a}{1-e^{-aT}}$$

- Ecrire l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée, notée  $F(z)$ . Donner la relation de récurrence liant l'entrée  $e$  à la sortie  $s$ .

- Le système étant initialement au repos, on applique sur l'entrée  $e$  un échelon unitaire de position. Calculer les six premiers échantillons de la sortie ( $s_0 \dots s_5$ ) pour la situation suivante :

$$aT = 1$$

- Représenter l'allure générale des variations temporelles de la sortie  $s$ , déduites des calculs précédents. En particulier, on tiendra compte des résultats obtenus plus haut, relatifs à la précision statique de l'asservissement.

## 4. Mise en place d'un correcteur.

On insère en série, dans la chaîne directe, un réseau correcteur de transmittance pulsée  $C(z)$ , conformément au schéma de la figure 3, dans lequel les deux échantillonneurs sont supposés synchrones.

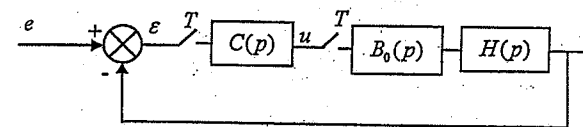


Figure 3

Dans la suite du problème, on s'intéresse à deux réglages différents du correcteur :

- correcteur à réponse pile.
- correcteur PI.

## A) Etude du correcteur à réponse pile.

On souhaite que le système corrigé réponde rapidement et sans erreur à un échelon unitaire de position appliqué sur l'entrée  $e$ . Pour cela, on impose :

$$s_0 = 0$$

$$s_n = 1 ; n > 0$$

- 1) Ecrire la relation de récurrence liant la sortie du correcteur  $u$  et la sortie  $\varphi$  de l'asservissement.
- 2) Calculer la valeurs des échantillons  $u_n ; n \geq 0$ .
- 3) Déterminer l'expression de la transmittance  $C(z)$  permettant d'obtenir le fonctionnement souhaité.

## B) Etude du correcteur PI.

Le réglage s'effectue en appliquant les résultats présentés en cours et qui conduisent aux équations suivantes :

$$u_n = u_{n-1} + k_p \cdot (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) + k_i \cdot T \cdot \varepsilon_n$$

$$k_p = 0,45 \cdot k_0 - 0,5 \cdot k_i \cdot T$$

$$k_i = 0,54 \cdot \frac{k_0}{T_0}$$

où  $k_0$  et  $T_0$  caractérisent le fonctionnement juste oscillant de l'asservissement numérique non corrigé.

- 1) A partir de l'étude précédente, déterminer les valeurs des paramètres  $k_0$  et  $T_0$ .
- 2) En déduire l'expression de la transmittance  $C(z)$  du correcteur PI.
- 3) Ecrire l'équation de récurrence liant l'entrée à la sortie corrigée.
- 4) En déduire la réponse indicielle du système corrigé, en se limitant au calcul des six premiers échantillons de la sortie.

## C) Conclusion.

Quelles comparaisons pouvez-vous effectuer sur les deux correcteurs réalisés :

- En terme de complexité des calculs,
- En terme de performances ?



Examen final  
Mardi 4 janvier 2005

L'épreuve est constituée d'un exercice (questions de cours) et deux problèmes indépendants. Les documents ne sont pas autorisés. Les calculatrices sont fournies.

Barème approximatif : l'exercice (5pts), problème 1 (10 pts), problème 2 (5 pts).

Exercice I On donne le système de fonction de transfert suivante

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{2}{p(p+\alpha)}$$

$\alpha$  étant un paramètre réel non nul.

- I.1) Donner une représentation d'état du système.
- I.2) Le système est-il stable?
- I.3) Le système est-il commandable?
- I.4) Le système est-il observable?
- I.5) Donner la représentation modale d'état du système. Donner le schéma de simulation associé.

PROBLÈME I

Système électronique

PARTIE A : Analyse du système

Dans ce problème, on se propose de commander un système électronique représenté par la figure 1. Les amplificateurs opérationnels sont parfaits et ils fonctionnent en régime linéaire dans une configuration de suiveur. Le but est de commander, à l'aide de la tension  $U$ , les tensions  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  aux bornes des condensateurs. Ces trois condensateurs ont la même capacité  $C$ . Les trois résistances sont identiques et valent  $R$ .

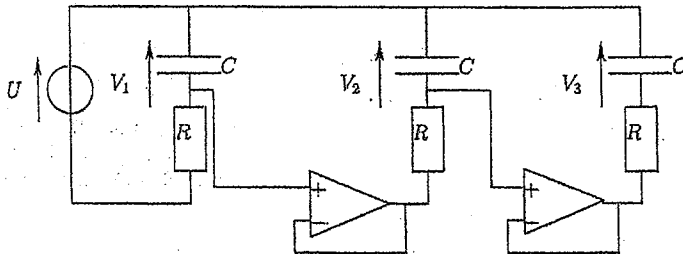


Figure 1: Schéma électronique

A.1) Donner les équations différentielles en  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$ . On utilisera pour cela les lois de Kîrchoff des nœuds et des mailles.

A.2) On pose:

$$\begin{cases} V_1 = V_0 + v_1 \\ V_2 = V_0 + v_2 \\ V_3 = V_0 + v_3 \\ U = U_0 + u \end{cases}$$

Donner la relation entre  $U_0$  et  $V_0$  tels que les termes  $V_0$  et  $U_0$  ne correspondent qu'au régime permanent et que les termes  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  et  $u$  ne correspondent qu'au régime dynamique.

A.3) En ayant la mesure de la tension  $y = v_3$ , donner une représentation d'état du système sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu, \\ y = CX, \end{cases}$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & a & -a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1]$$

Donner l'expression de  $a$  en fonction de  $\tau = RC > 0$ .

A.4) Calculer les valeurs propres de  $A$  et discuter de la stabilité du système.

A.5) Donner la fonction de transfert reliant l'entrée  $e$  à la sortie  $y$ .

A.6) Donner la matrice de transition  $\Phi(t, 0) = \exp(At)$  en fonction du paramètre  $\tau$  et du temps  $t$ . On pourra utiliser la formule d'interpolation de Sylvester. En déduire la réponse libre pour les conditions initiales  $X_0 = (2 \ 1 \ 0)^T$ .

PARTIE B : Retour d'état

Dans cette partie on va déterminer une commande sous forme de retour d'état, en supposant que l'état  $X$  est mesurable.

B.1) Déterminer la matrice de commandabilité de la paire  $(A, B)$ :  $C_{(A,B)}$ . Le système est-il commandable?

B.2) On souhaite modifier la dynamique du système en doublant les valeurs des modes du système et en ayant un gain statique égal à 1. Pour cela on réalise une commande sous forme de retour d'état:

$$u = -KX + \eta u_{cons}$$

où  $u_{cons}$  est la consigne en tension, la matrice  $K$  permet de régler la dynamique, et le coefficient  $\eta$  permet de régler le gain statique.

Après avoir déterminé la taille de la matrice  $K$ , déterminer ses coefficients pour respecter le cahier des charges.

Donner la valeur de  $\eta$  qui respecte le cahier des charges.

PARTIE C : Estimation de l'état

Désormais l'hypothèse que l'état  $X$  est mesurable n'est plus vérifiée. Cette partie s'intéresse à l'estimation de l'état grâce à la sortie  $y$ .

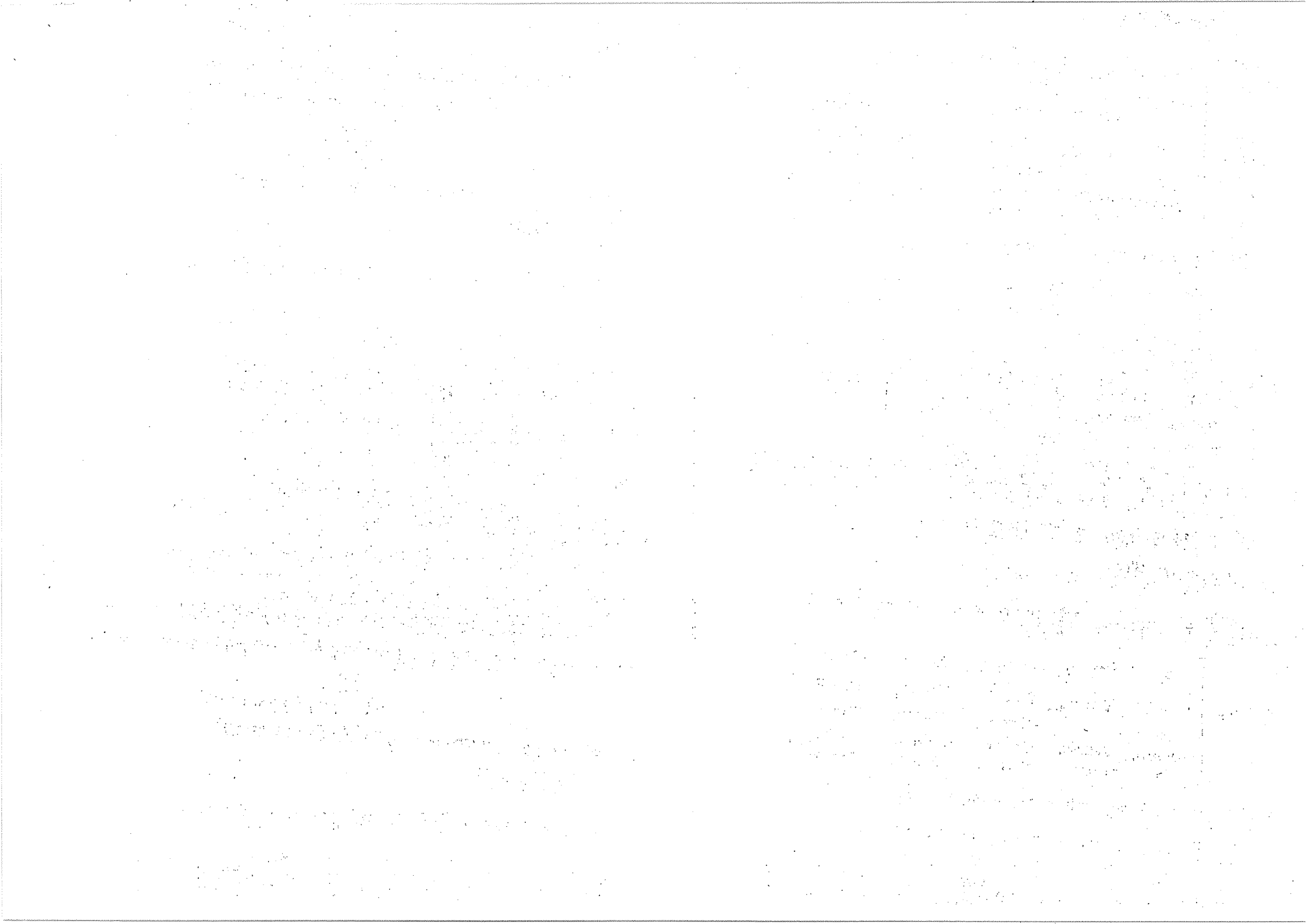
C.1) Déterminer la matrice d'observabilité de la paire  $(C, A)$ :  $O_{(C,A)}$ . Le système est-il observable?

C.2) Pour obtenir une estimée  $\hat{X}$  de l'état  $X$ , on utilise un observateur de la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = A\hat{X} + Be + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{X} \end{cases}$$

Donner l'équation différentielle vérifiée par l'erreur  $e = \hat{X} - X$ .

C.3) Déterminer le gain  $L$  de l'observateur afin que sa dynamique soit deux fois plus rapide que la dynamique du système corrigé par retour d'état.



**MODULE CP**

module de 12 semaines

**Partie A : Asservissements numériques**

Documents non autorisés

On s'intéresse à l'étude de l'asservissement échantillonné représenté sur la figure 1, d'entrée  $e$  et de sortie  $s$ .

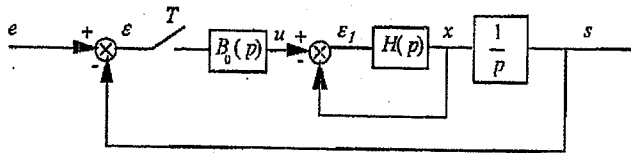


Figure 1

La transmittance  $H(p)$ , caractéristique de la chaîne directe, est telle que :

$$H(p) = \frac{H_0}{p+a}$$

avec :

$$H_0 = 10 \text{ rad/s}$$

$$a = 5 \text{ rad/s}$$

$B_0(p)$  représente la transmittance d'un bloqueur d'ordre zéro. On a :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$$

$T$  désigne la période d'échantillonnage, telle que :

$$T = \frac{\alpha}{a}$$

où  $\alpha$  est un paramètre réglable connu.

On appelle  $A(p)$  la transmittance de la chaîne directe de l'asservissement de la figure 1, conduisant au schéma bloc représenté sur la figure 2 ci-dessous :

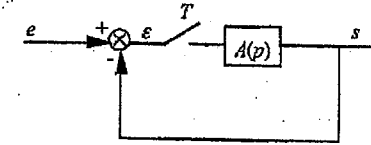


Figure 2

- 1) Donner l'expression de la transmittance  $A(p)$ .
- 2) Décomposer en éléments simples la partie rationnelle de  $A(p)$ , notée  $A'(p)$ .
- 3) Calculer la transformée en  $z$  de chacun des éléments simples constituant  $A'(p)$ . Pour cela, il sera commode d'utiliser certains résultats consignés dans le tableau ci-dessous :

$F(p)$	$F(z)$
$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T \cdot z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$

En déduire la transformée en  $z$  de  $A'(p)$ .

Dans toute la suite du problème, on considère que le paramètre  $\alpha$  est tel que :  $\alpha = \frac{1}{3}$

- 4) A partir des résultats précédents, déterminer la transformée en  $z$  de  $A(p)$ , notée  $A(z)$ . Montrer que  $A(z)$  se met sous la forme :

$$A(z) = A \cdot \frac{\chi z + b}{(z - \chi) \cdot (z - c)}$$

Donner les valeurs des paramètres  $A$ ,  $\chi$ ,  $b$  et  $c$ .

- 5) Donner l'expression de la transmittance pulsée  $F(z)$  de l'asservissement, telle que :

$$F(z) = \frac{s(z)}{e(z)}$$

- 6) Etude de la stabilité de l'asservissement pulsé.

- Ecrire l'équation caractéristique de l'asservissement pulsé.
- En utilisant la méthode de votre choix, indiquer si l'asservissement est stable ou instable.

- 7) Etude du régime transitoire.

- Ecrire la relation de récurrence liant les échantillons  $e_n$  de l'entrée  $e(t)$  et les échantillons  $s_n$  de la

sortie  $s(t)$ .

Le système étant initialement au repos, on applique sur l'entrée  $e$  un échelon de position d'expression :

$$e(t) = 5 \cdot u(t)$$

- Calculer les échantillons  $s_n$ , pour  $0 \leq n \leq 10$ . Que constate-t-on ?
- 8) Etude du régime établi.
  - Que vaut l'erreur de position  $\varepsilon_p$ , pour l'excitation envisagée au paragraphe ci-dessus ?
  - A partir des résultats précédents, représenter les variations de la sortie  $s(t)$  ;  $0 \leq t < \infty$ .
- 9) Pour résumer l'étude précédente, quelles sont les qualités et les défauts de l'asservissement de la figure 1 ?
- 10) Mise en œuvre d'un réseau correcteur numérique.

On modifie le montage précédent en introduisant un correcteur série, de transmittance pulsée  $C(z)$ , conformément au schéma de la figure 3.

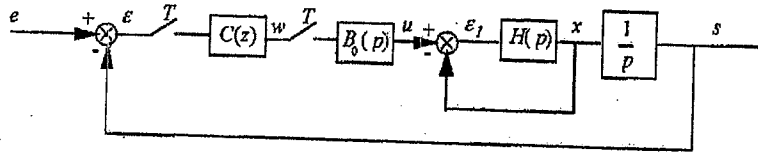


Figure 3

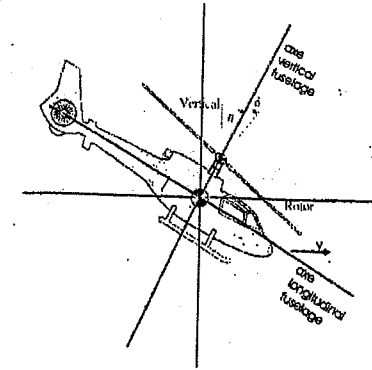
Le correcteur  $C(z)$  est élaboré de manière à rendre la sortie  $s(t)$  à réponse pile, lorsque l'entrée  $e(t)$  est un échelon unitaire de position. Pour cela, on impose que la sortie  $s(t)$  soit telle que :

$$s_n = 1 ; n > 1$$

$$s_1 \neq 1$$

- a) A partir de la mise en équation de la chaîne directe de l'asservissement de la figure 3, déterminer la valeur des deux seuls échantillons non nuls du signal  $u(t)$ , apparaissant en  $t = 0$  et  $t = T$ , notés respectivement  $u_0$  et  $u_1$ , permettant d'obtenir la sortie  $s(t)$  recherchée.
- b) Représenter les variations temporelles des signaux  $u(t)$  et  $s(t)$  résumant les résultats obtenus précédemment.
- c) Dédire des calculs précédents, la fonction de transfert  $C(z)$  du correcteur numérique. Ecrire la relation de récurrence liant les échantillons  $w_n$  aux échantillons  $\varepsilon_n$ .

**PARTIE B**  
**VARIABLES D'ETAT**  
Documents non autorisés



Les équations ci-dessous décrivent les petits mouvements dans le plan longitudinal d'un hélicoptère autour d'une position d'équilibre (altitude et vitesse sol constante). L'hélicoptère est piloté par l'inclinaison  $\delta$  du rotor ;  $\theta$  désigne l'angle de tangage de l'hélicoptère (angle que fait l'axe longitudinal du fuselage avec l'horizontale), et  $V$  est la vitesse sol ou vitesse horizontale.

$$\ddot{\theta} = -0.4\dot{\theta} - 0.01V + 6.3\delta$$

$$\dot{V} = -0.8\dot{\theta} + 10\theta - 0.02V + 10\delta$$

On dispose d'un capteur de vitesse, qui permet de mesurer la variable  $V$ .

1 - Quels sont les états et les entrées du système? Définir le vecteur d'état  $X$ , la commande  $u$ , la sortie  $y$  et les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  du système.

2 - Donner l'expression du polynôme caractéristique du système.

3 - Rappeler la condition de stabilité d'un système linéaire stationnaire. Le système est-il stable? (justifier)

# UE 421 = SESSION SEPTEMBRE 2001

4 - Le système est-il commandable? (justifier)

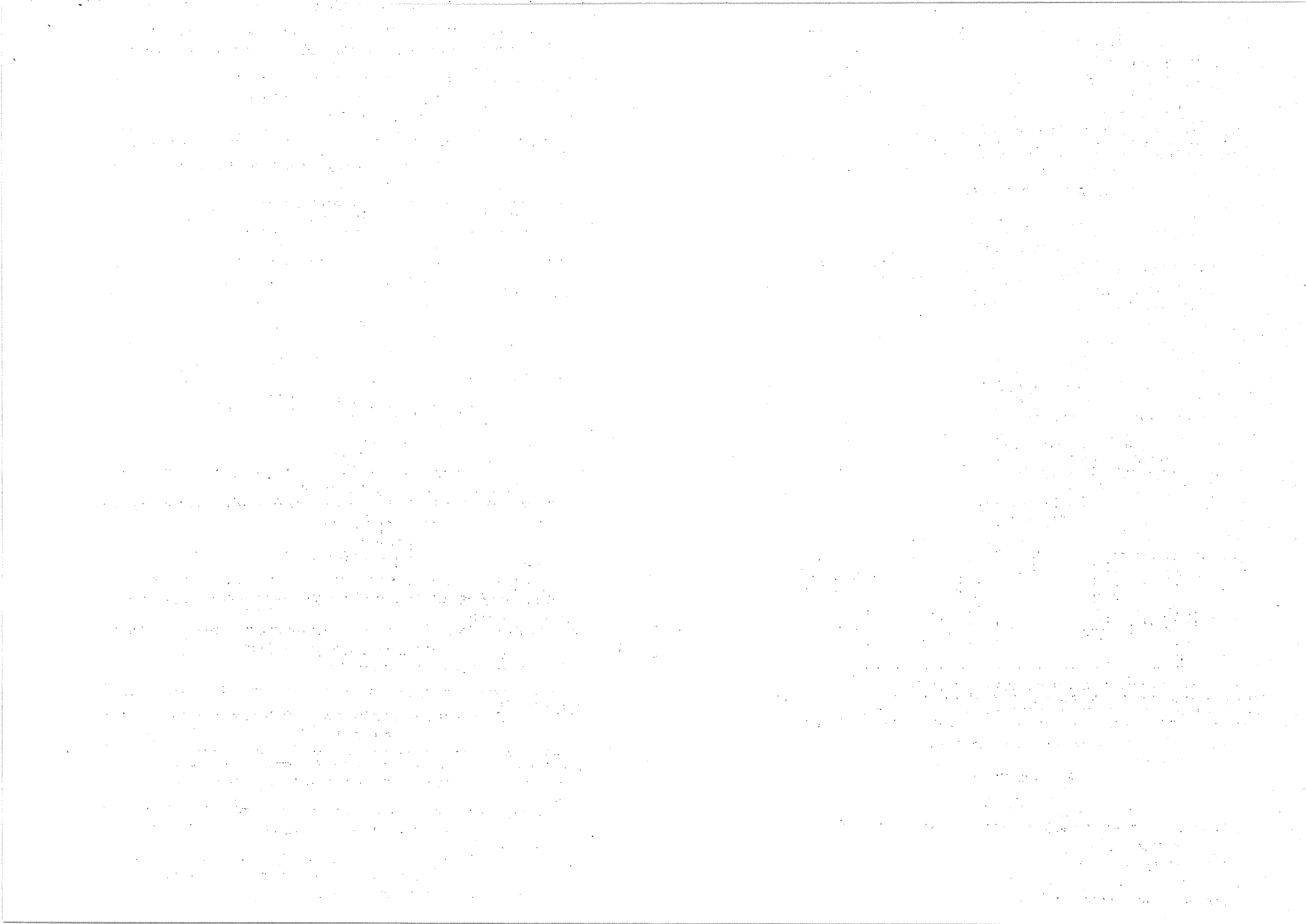
5 - On veut stabiliser le sous-système par un retour d'état  $u = -FX + \mu v$ , où  $v$  est la commande donnée par le pilote. On propose de prendre  $F = (0.4 \ 0.6 \ 0.05)$ .

Donner l'expression des matrices du système en boucle fermée, et écrire le système d'équations correspondant.

6 - Le système en boucle fermée est-il stable? (justifier)

7 - Le système est-il observable? (justifier)

8 - Donner l'expression littérale des équations d'un observateur permettant de reconstruire l'état du système, et faire le schéma de l'observateur-contrôleur résultant.



Examen final du 07 janvier 2004

Durée : 3 heures

Sujet pour les étudiants ayant suivi le module CP pendant les douze semaines dans le cadre de la maîtrise ou du magistère.

Les parties A-1, A-2 & B doivent être rédigées sur des copies séparées.

Seules sont autorisées les calculatrices fournies.

Partie A-1

Second ordre et rejet de perturbation

Le schéma de la figure 1 représente l'asservissement échantillonné de position à retour unitaire étudié lors du partiel de novembre dernier.  $A(p)$  désigne la transmittance de la chaîne directe, d'expression :

$$A(p) = \frac{A_0}{(p+a)^2}$$

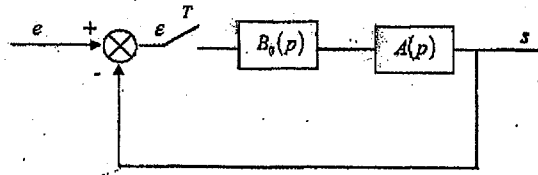


Figure 1.

De façon équivalente, cet asservissement peut se représenter sous la forme de la structure à retour unitaire de la figure 2, faisant apparaître la fonction de transfert  $H(z)$  telle que :

$$H(z) = \frac{(1-2 \cdot D) \cdot z + D^2}{(z-D)^2}$$

Dans cette expression, la constante  $D$  a pour valeur :  $D = e^{-1} = 0,368$

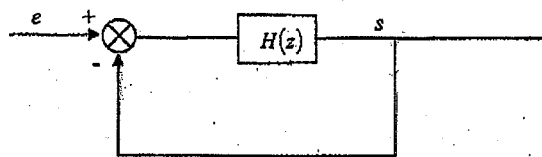


Figure 2.

1. Etude du régime transitoire

1. Ecrire l'équation caractéristique de l'asservissement de la figure 2.
2. Déterminer la position des pôles de cet asservissement dans le plan  $z$ .
3. En utilisant la méthode de votre choix, indiquer si le fonctionnement de l'asservissement est stable ou instable.
4. A partir de l'étude précédente, déterminer l'allure de la réponse de l'asservissement à un échelon unitaire de position.
5. Ecrire la relation de récurrence liant les échantillons de sortie  $s_n$  aux échantillons d'entrée  $e_n$ .
6. Calculer les dix premiers échantillons de sortie, lorsque l'entrée est un échelon unitaire de position.
7. Comment peut-on relier le mode pseudo-oscillant obtenu à la position des pôles dégagée au 2. ci-dessus ?
8. Quels commentaires peut-on faire sur le régime permanent de cet asservissement, piloté par l'excitation étudiée ?

2. Représentation RST équivalente

Montrer que l'asservissement de la figure 1 peut se représenter sous la forme de la structure RST de la figure 3.

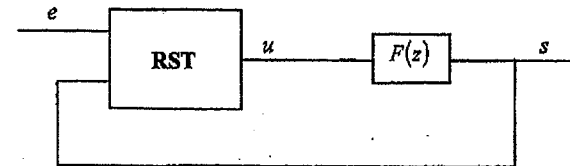


Figure 3.

1. Donner l'expression de la transmittance  $F(z)$  apparaissant dans le schéma de la figure 3.
2. Sur la figure 3, que désigne le signal  $u$  ?
3. Dans cette représentation, déterminer l'expression des rapports polynomiaux  $\frac{S(z)}{R(z)}$  et  $\frac{T(z)}{S(z)}$ .

3. RST et rejet de perturbation

On suppose maintenant que l'asservissement étudié est perturbé par un signal analogique externe  $\Delta(t)$  d'expression :

$$\Delta(t) = \Delta \cdot \sin(bt)$$

intervenant entre le bloqueur et la transmittance  $A(p)$ .

Les transformées en  $p$  et en  $z$ , notées respectivement  $\Delta(p)$  et  $\Delta(z)$  de ce signal sont égales à :

$$\Delta(p) = \frac{\Delta}{p^2 + b^2}$$

$$\Delta(z) = \frac{z \cdot \sin(bT)}{z^2 - 2z \cdot \cos(bT) + 1}$$

où  $T$  désigne la période d'échantillonnage de l'asservissement.

1. A partir du schéma de la figure 1, dessiner l'asservissement échantillonné, tenant compte de la présence de cette perturbation analogique.

L'asservissement ainsi perturbé peut se représenter par la structure de la figure 4 faisant apparaître le signal de perturbation  $P$ .

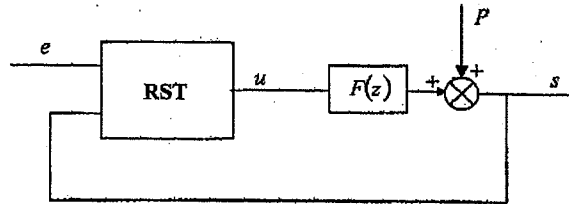


Figure 4.

2. On souhaite procéder au réglage du correcteur RST, de manière à ce que la perturbation  $P$  de la figure 4 soit rejetée par l'asservissement. Montrer que ce rejet de perturbation est atteint lorsque la condition asymptotique suivante est respectée :

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{P(z)}{1 + F(z) \cdot \frac{S(z)}{R(z)}} = 0$$

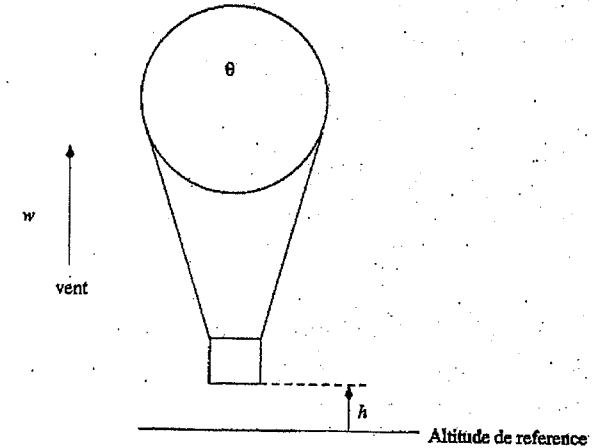
3. Déterminer quelle doit être la forme du rapport  $\frac{S(z)}{R(z)}$  permettant d'obtenir ce rejet de perturbation.
4. Quelle incidence ce correcteur aura-t-il sur le régime statique de l'asservissement ?
5. On considère maintenant que le rapport  $\frac{S(z)}{R(z)}$  est égal à :

$$\frac{S(z)}{R(z)} = \frac{1}{10} \frac{1}{z-1}$$

6. Ecrire la transmittance en boucle fermée de l'asservissement ainsi corrigé. En déduire la relation de récurrence existant entre l'entrée et la sortie de l'asservissement.
7. Calculer les 30 premiers échantillons de la sortie, pour une entrée en échelon unitaire. Que constate-t-on ?

Examen de Contrôle de processus  
Partie A-2

Dynamique d'une mongolfière



Les équations du mouvement d'un ballon à air chaud (voir figure) sont approximativement :

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{\tau_1} \theta + u \quad (\text{A-2.1a})$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau_2} v + \sigma \theta + \frac{1}{\tau_2} w \quad (\text{A-2.1b})$$

$$\dot{h} = v \quad (\text{A-2.1c})$$

où  $\theta$  représente la différence par rapport à l'équilibre de la température de l'air contenu dans le ballon ;  $u$  est proportionnel au chauffage du ballon (entrée de commande),  $v$  représente la vitesse verticale,  $h$  la différence d'altitude par rapport à l'équilibre et  $w$  la vitesse ascendante du vent (entrée de perturbation).



1 - Donner une représentation d'état du système de la forme

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew \quad (\text{A-2.2a})$$

$$y = Cx \quad (\text{A-2.2b})$$

avec  $u = (u)$  le vecteur de commande,  $w = (w)$  le vecteur de perturbation et  $y = (h)$  le vecteur de sortie. On prendra soin de préciser le vecteur d'état  $x$  et les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  qui interviennent dans la représentation (A-2.2).

2 - Donner le schéma de simulation correspondant.

3 - Déterminer les modes du système et discuter de la stabilité.

4 - On désire mettre en œuvre un bouclage d'état

$$u = -Kx + \alpha h_{\text{ref}} \quad (\text{A-2.3})$$

de manière à ce que le système en boucle fermée admette les pôles  $\{-\frac{1}{\tau_1}, -\frac{2}{\tau_2}, -\frac{2}{\tau_2}\}$ . Déterminer les gains d'un tel bouclage.

Déterminer  $\alpha$  pour que  $h_{\text{ref}}$  corresponde à l'altitude de référence à laquelle on désire asservir l'altitude  $h$ .

5 - Puisque l'on mesure uniquement l'altitude  $h$ , on va utiliser un observateur asymptotique pour mettre en œuvre la loi de commande (A-2.3). Rappeler l'équation d'un tel observateur et déterminer les gains pour qu'il admette les pôles  $\{-\frac{1}{\tau_1}, -\frac{1}{\tau_2}, -\frac{1}{\tau_2}\}$ .

A-2.2

## Examen de Contrôle de processus Partie B

### Asservissement d'un réacteur chimique

*Sujet pour les étudiants ayant suivi le module CP pendant les huit premières semaines dans le cadre de la maîtrise et les quatre dernières semaines dans le cadre de la maîtrise ou du magistère. Les parties A et B doivent être rédigées sur des copies séparées.*

*Tous les documents sont interdits, y compris les téléphones portables. Les calculatrices de l'université sont autorisées. Les copies seront ramassées en deux temps: partie A ramassée après 2 heures et partie B ramassée après 3 heures.*

Nous nous proposons d'étudier l'asservissement d'un réacteur chimique. Aucune connaissance particulière en chimie n'est nécessaire. Les différentes parties sont largement indépendantes.

#### 1 Présentation du problème

On considère le réacteur de la figure 1, qui est parfaitement agité. Les variables intensives comme la température  $T$  et les concentrations  $C_A$  et  $C_B$  de constituants donnés  $A$  et  $B$  sont identiques dans tout le volume  $V$  du réacteur et conservent leur valeur dans le courant de sortie.

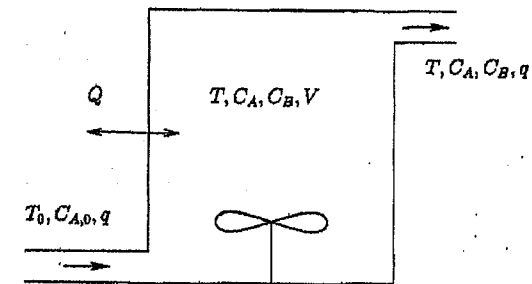


Figure 1: Schéma du réacteur chimique

Il est injecté dans le réacteur un réactif  $A$  à un débit  $q$  avec une concentration  $C_{A,0}$  à une température  $T_0$  constante. Le fluide du réacteur sort par un conduit de trop plein à un débit  $q$  (égal à celui d'entrée). Le volume total  $V$  du réacteur ouvert est donc constant. La masse volumique  $\rho$  du fluide est supposée constante dans tout le réacteur, ainsi que sa capacité calorifique  $c$ . Il se produit dans le réacteur la réaction chimique du premier ordre suivante :



La vitesse de réaction  $r$  dépend de la température  $T$  du réacteur et de la concentration  $C_A$  du réactif  $A$  est donnée par la loi d'Arrhénius :

$$r = k \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) VC_A$$

L'énergie d'activation  $E$  ( $E > 0$ ) est l'énergie qu'il faut fournir pour que la réaction se produise.  $R$  est la constante des gaz parfaits et  $k$  est une constante. Quand cette réaction se produit, elle libère de l'énergie (réaction exothermique). L'enthalpie de réaction est notée  $H$  ( $H < 0$ ).

B. 1

Thermiquement le réacteur ne peut pas échanger de la chaleur avec les parois. La seule action directe possible sur le système est l'apport ou le retrait de chaleur que l'on notera  $Q$  par un moyen que l'on ne décrit pas ici.

## 2 Mise en équation du problème

En faisant deux bilans de matière sur les constituants  $A$  et  $B$  nous obtenons les deux équations suivantes :

$$V \frac{dC_A}{dt} = q(C_{A,0} - C_A) - k \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) VC_A$$

$$V \frac{dC_B}{dt} = -qC_B + k \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) VC_A$$

On obtient une troisième équation en faisant un bilan thermique du réacteur :

$$\rho V c \frac{dT}{dt} = q \rho c (T_0 - T) - k \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) VC_A H + Q$$

2.1 En prenant le vecteur  $X = \begin{bmatrix} T \\ C_A \\ C_B \end{bmatrix}$  comme vecteur d'état, et  $Q$  comme entrée du système, donner la représentation du système non linéaire sous la forme suivante :

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} = f(X, Q) \quad (\text{B. 1})$$

2.2 Déterminer l'équation d'évolution de la variable  $(C_A + C_B)$ . Donner l'expression de la variable  $(C_A + C_B)$  en fonction du temps  $t$ , des conditions initiales  $C_{A,0}$  et  $C_{B,0}$  et des données du problème. En déduire que ce système (B. 1) n'est pas commandable.

2.3 Comme ce système n'est pas commandable, on ne s'intéresse plus dans la suite du problème qu'à un sous-système de (B. 1). Donner la représentation d'état du système dynamique de vecteur d'état  $Z = \begin{bmatrix} T \\ C_A \end{bmatrix}$  et d'entrée  $Q$ .

## 3 Étude des points d'équilibre.

3.1 Rappeler la définition des points d'équilibre pour un système général de la forme (B. 1).

3.2 Donner deux relations entre la concentration  $C_{A,eq}$  et la température  $T_{eq}$  pour l'équilibre du sous-système de vecteur d'état  $Z$  et d'entrée  $Q$ , en supposant que  $Q = 0$ . (On ne demande ici que la relation non linéaire qui lie ces grandeurs.)

3.3 Exprimer la concentration d'équilibre  $C_{A,eq}$  en fonction de  $T_{eq}$ , de  $C_{A,0}$  et des autres données du problème. On ne demande pas de résoudre explicitement l'autre relation (expression analytique de  $T_{eq}$ ), étant donné qu'il y a plusieurs solutions à ces équations non linéaires.

## 4 Asservissement autour de $T_{eq}$ par retour d'état.

Pour se faire, nous allons tout d'abord linéariser le système dynamique de vecteur d'état  $Z = \begin{bmatrix} T \\ C_A \end{bmatrix}$  et d'entrée  $Q$ , autour du point d'équilibre  $(C_{A,eq}(T_{eq}), T_{eq})$ . On note  $T = T_{eq} + \Delta T$ ,  $C_A = C_{A,eq}(T_{eq}) + \Delta C_A$  et  $Q = \Delta Q$ . On montre qu'en unité SI :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta T \\ \Delta C_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.6 \cdot 10^{-2} & 1.0 \cdot 10^{-1} \\ 1.0 \cdot 10^{-1} & -7.6 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T \\ \Delta C_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.3 \cdot 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta Q \quad (\text{B. 2})$$

B. 2

4.1 Déterminer les valeurs propres de la matrice de dérive de ce système linéaire. Montrer que (B. 2) est instable.

4.2 Calculer la matrice de commandabilité  $C$  de ce sous-système linéaire. Montrer que ce sous-système (B. 2) est commandable.

4.3 On se propose de faire un placement de pôles avec une commande de la forme :

$$\Delta Q = - \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T \\ \Delta C_A \end{bmatrix} + K_3 \Delta C_{A,cons}$$

avec  $\Delta C_{A,cons}$  la consigne de variation de concentration du produit  $A$ . Déterminer les valeurs de  $K_1$  et  $K_2$  pour avoir en boucle fermée des pôles en  $-1$  et  $-2$ . Préciser les unités de ces constantes.

4.5 Donner la valeur de  $K_3$  pour avoir un gain statique unitaire, on donnera l'unité de cette constante.

## 5 Correction avec observateur.

L'hypothèse faite dans la partie précédente que l'état est mesurable n'est plus valable. La seule mesure disponible est celle de la température  $\Delta T$  par un thermomètre dans la conduite de sortie.

5.1 Calculer pour cette mesure la matrice  $O$  d'observabilité. Montrer qu'avec cette mesure le sous-système (B. 2) est observable.

5.2 On considère l'observateur de la forme :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \hat{T} \\ \Delta \hat{C}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.6 \cdot 10^{-2} & 1.0 \cdot 10^{-1} \\ 1.0 \cdot 10^{-1} & -7.6 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{T} \\ \Delta \hat{C}_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} (\Delta \hat{T} - \Delta T) + \begin{bmatrix} 2.3 \cdot 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} \Delta Q$$

Déterminer les coefficients  $L_1$  et  $L_2$  pour placer les pôles de l'observateur en  $-3$  et  $-6$ . Préciser les unités de ces deux constantes.

B. 3

**MODULE CP**

**ASSERVISSEMENTS ECHANTILLONNES**

Examen partiel du 5 novembre 2003

Durée : 3 heures

**Documents non autorisés**

L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes.

Barème approximatif :

Première partie : 5 points  
Deuxième partie : 15 points

**Première partie**

**Questions de cours**

- Dessiner le contour d'exclusion utilisé dans le critère de Nyquist appliqué à l'étude de la stabilité des asservissements numériques.
- En désignant par  $TZ\{H(p)\}$  la transformée en  $z$  de  $H(p)$ , donner l'expression de la transmittance pulsée  $T(z)$  équivalente à la chaîne constituée d'un échantillonneur, d'un bloqueur d'ordre zéro et d'un filtre de transmittance  $H(p)$ .
- $B(p)$  désignant une fonction de transfert quelconque, dans quelles conditions portant sur  $A(p)$  peut-on écrire que la transformée en  $z$  du produit  $A(p) \cdot B(p)$  est égale au produit  $A(z) \cdot B(z)$  des transformées en  $z$  de  $A(p)$  et  $B(p)$  ?
- Pour quelle raison utilise-t-on parfois la transformée en  $w$  pour étudier la stabilité des asservissements numériques ?
- Dans la figure 1 ci-dessous, les deux échantillonneurs sont synchrones. Donner l'expression de la transmittance pulsée  $F(z) = \frac{s(z)}{e(z)}$ .

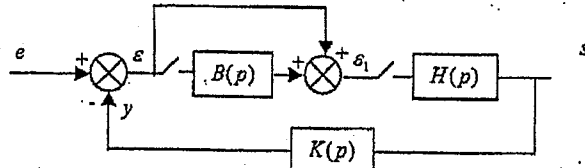


Figure 1

**Deuxième partie**

**Analyse et correction d'un asservissement numérique**

L'asservissement échantillonné à retour unitaire de la figure 2 possède la transmittance  $H(p)$  définie par :

$$H(p) = \frac{H_0}{(p+a)^2}$$

où  $H_0$  et  $a$  sont des paramètres positifs à valeurs réelles.

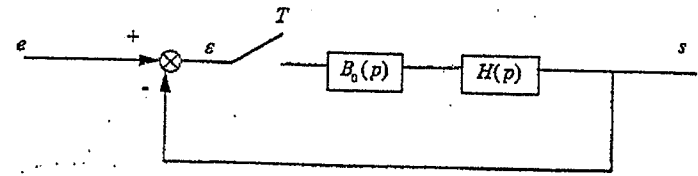


Figure 2

La fonction de transfert  $B_0(p)$  est celle d'un bloqueur d'ordre zéro dont on rappelle l'expression :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$$

$T$  désigne la période d'échantillonnage du signal d'erreur.

- Déterminer l'expression de la fonction de transfert échantillonnée, notée  $\overline{B_0 H}(z)$ , de la chaîne directe de l'asservissement de la figure 2. Pour cela, on utilisera certaines transformées en  $z$  de quelques signaux, résumées dans le tableau 1 ci-dessous.

$f(p)$	$f(z)$
$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T \cdot z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{(1+tp)^2}$	$\frac{T \cdot z \cdot e^{-\frac{T}{t}}}{t^2 \cdot (z - e^{-\frac{T}{t}})^2}$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2}{2} \cdot \frac{z \cdot (z+1)}{(z-1)^3}$

Tableau 1. Transformées en  $z$  de quelques signaux usuels



Montrer que  $\overline{B_0 H(z)}$  peut se mettre sous la forme :

$$\overline{B_0 H(z)} = \frac{H_0}{a^2} \frac{\alpha \cdot z + \beta}{(z - \chi)^2}$$

Donner les expressions des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\chi$  en fonction de  $T$  et  $a$ .

Dans toute la suite du problème, on considère que les paramètres  $a$  et  $T$  sont liés par :

$$a \cdot T = 1$$

2. Donner l'expression de la transmittance  $\overline{B_0 H(z)}$ , déduite de la question 1.

3. Etude de la stabilité.

3.1. En utilisant le critère de Jury que l'on rappellera, déterminer la condition de stabilité de l'asservissement de la figure 1. Pour cela, calculer la valeur maximale que peut prendre le rapport  $\frac{H_0}{a^2}$ .

3.2. La représentation analogique de l'échantillonneur bloqueur présentée en cours consiste en un retard pur de valeur  $\frac{T}{2}$ . Dans ce cadre, déterminer les conditions de stabilité de l'asservissement, par une démarche analogique. Pour cela :

3.2.1. Dessiner le schéma de l'asservissement analogique représentant une approche de l'asservissement de la figure 2.

3.2.2. Ecrire l'équation caractéristique de l'asservissement analogique.

3.2.3. En déduire l'équation non linéaire que doit vérifier l'argument de la transmittance  $H(p)$ , en régime harmonique ( $p = j\omega$ ).

3.2.4. Pour résoudre l'équation ci-dessus, déterminer par approximations successives, au moyen d'une calculatrice, la valeur du rapport  $\frac{\omega}{a}$  pour laquelle l'équation caractéristique est vérifiée.

3.2.5. En déduire la condition de stabilité portant sur le rapport  $\frac{H_0}{a^2}$ .

3.3. Comparer les valeurs obtenues aux paragraphes 3.1 et 3.2 du rapport  $\frac{H_0}{a^2}$ .

4. Etude de la précision statique.

4.1. Calculer l'erreur de position, notée  $\varepsilon_p$ .

4.2. Calculer l'erreur de vitesse, notée  $\varepsilon_v$ .

Dans toute de la suite de ce problème, on suppose que le rapport  $\frac{H_0}{a^2}$  est réglé à la valeur suivante :

$$\frac{H_0}{a^2} = 5$$

5. Etude de la précision dynamique.

5.1. Ecrire l'expression de la transmittance en boucle fermée, liant les signaux  $e(z)$  et  $s(z)$ .

5.2. En déduire la relation de récurrence existant entre les échantillons  $e_n$  de l'entrée et les échantillons  $s_n$  de la sortie.

5.3. On applique un échelon unitaire de position à l'entrée de l'asservissement de la figure 2. Déterminer, au moyen d'une calculatrice, la valeur des quinze premiers échantillons  $s_n$ . A partir de ces échantillons, représenter les variations du signal  $s(t)$ .

5.4. Que peut-on conclure sur la validité des calculs de stabilité effectués précédemment ?

6. Quels sont les défauts que présente cet asservissement ?

7. Mise en place et réglage du correcteur.

On introduit un correcteur série, de transmittance  $C(z)$ , conformément au schéma de la figure 3.

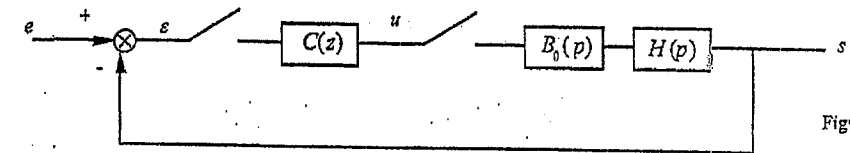


Figure 3

On se propose de régler ce correcteur, en effectuant une action PI. Cette correction est caractérisée par la relation de récurrence suivante, liant les échantillons  $u_n$  et  $\varepsilon_n$  :

$$u_n = u_{n-1} + k_p \cdot (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) + k_i \cdot T \cdot \varepsilon_n$$

7.1. Dans la relation ci-dessus, que représentent les coefficients  $k_p$  et  $k_i$  ?

7.2. La méthode de Takahashi, présentée en cours, préconise de choisir :

$$k_p = 0,45 \cdot k_0 - 0,5 \cdot k_i \cdot T$$

$$k_i = 0,54 \cdot \frac{k_0}{T_0}$$

On choisit les valeurs suivantes de  $k_0$  et  $T_0$  :

$$k_0 = 1,28$$

$$T_0 = 3 \cdot T$$

7.2.1. A partir des résultats précédents, comment la valeur de ces coefficients a-t-elle été déterminée ?

7.2.2. Calculer les valeurs de  $k_p$  et  $k_i$ . En déduire la relation de récurrence entre l'entrée et la sortie du correcteur.

**MODULE CP**

**ASSERVISSEMENTS ECHANTILLONNES**

Examen partiel du 5 novembre 2003

Durée : 3 heures

**Documents non autorisés**

L'épreuve est constituée de deux parties indépendantes.

Barème approximatif :

Première partie : 5 points  
Deuxième partie : 15 points

**Première partie**

**Questions de cours**

- Dessiner le contour d'exclusion utilisé dans le critère de Nyquist appliqué à l'étude de la stabilité des asservissements numériques.
- En désignant par  $TZ\{H(p)\}$  la transformée en  $z$  de  $H(p)$ , donner l'expression de la transmittance pulsée  $T(z)$  équivalente à la chaîne constituée d'un échantillonneur, d'un bloqueur d'ordre zéro et d'un filtre de transmittance  $H(p)$ .
- $B(p)$  désignant une fonction de transfert quelconque, dans quelles conditions portant sur  $A(p)$  peut-on écrire que la transformée en  $z$  du produit  $A(p) \cdot B(p)$  est égale au produit  $A(z) \cdot B(z)$  des transformées en  $z$  de  $A(p)$  et  $B(p)$  ?
- Pour quelle raison utilise-t-on parfois la transformée en  $w$  pour étudier la stabilité des asservissements numériques ?
- Dans la figure 1 ci-dessous, les deux échantillonneurs sont synchrones. Donner l'expression de la transmittance pulsée  $F(z) = \frac{s(z)}{e(z)}$ .

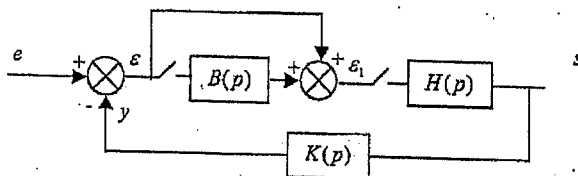


Figure 1

**Deuxième partie**

**Analyse et correction d'un asservissement numérique**

L'asservissement échantillonné à retour unitaire de la figure 2 possède la transmittance  $H(p)$  définie par :

$$H(p) = \frac{H_0}{(p+a)^2}$$

où  $H_0$  et  $a$  sont des paramètres positifs à valeurs réelles.

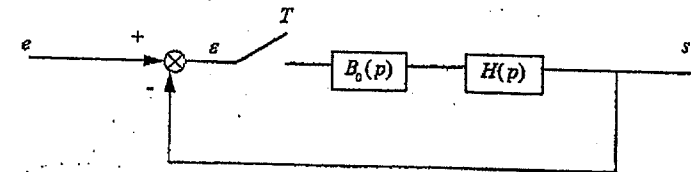


Figure 2

La fonction de transfert  $B_0(p)$  est celle d'un bloqueur d'ordre zéro dont on rappelle l'expression :

$$B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$$

$T$  désigne la période d'échantillonnage du signal d'erreur.

- Déterminer l'expression de la fonction de transfert échantillonnée, notée  $\overline{B_0 H}(z)$ , de la chaîne directe de l'asservissement de la figure 2. Pour cela, on utilisera certaines transformées en  $z$  de quelques signaux, résumées dans le tableau 1 ci-dessous.

$f(p)$	$f(z)$
$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T \cdot z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{(1+ap)^2}$	$\frac{T \cdot z \cdot e^{-\frac{T}{\tau}}}{\tau^2 \cdot (z - e^{-\frac{T}{\tau}})^2}$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2}{2} \cdot \frac{z \cdot (z+1)}{(z-1)^3}$

Tableau 1. Transformées en  $z$  de quelques signaux usuels

- 7.2.3. A partir des résultats précédents, déterminer la fonction de transfert  $C(z)$  du correcteur.  
 7.2.4. Ecrire la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement ainsi corrigé.  
 7.2.5. En déduire la relation de récurrence liant l'entrée  $e$  et la sortie  $s$ .  
 7.2.6. On applique un échelon unitaire de position à l'entrée de l'asservissement de la figure 3. Calculer la valeur des quinze premiers échantillons de la sortie  $s$ . Représenter les variations de  $s(k)$ .

8. Conclusion.

Que peut-on dire de l'effet du correcteur :

- sur la précision,
- sur la stabilité,
- sur la rapidité de l'asservissement ?

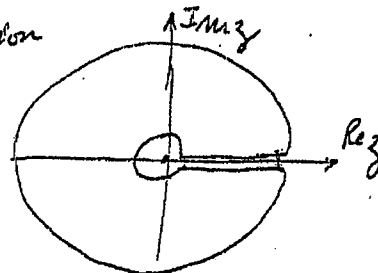
Module CP

Partiel de nov. 03.

Éléments de solution

Première partie

1. Contour d'exclusion



2. 
$$\frac{1 - e^{-Tf}}{f} H(p) \Rightarrow T(z) = (1 - z^{-1}) TZ \left[ \frac{H(p)}{f} \right]$$

3.  $A(p)$  est un retard pur ou un scalaire :  $A(p) = k$  ;  $A(p) = e^{-\theta p}$

4. La transformée en  $w$  ramène les singularités de l'intérieur du cercle trigonométrique du plan  $z$ , dans le demi-plan gauche. Le critère de Routh peut alors être utilisé, comme en continu.

5.

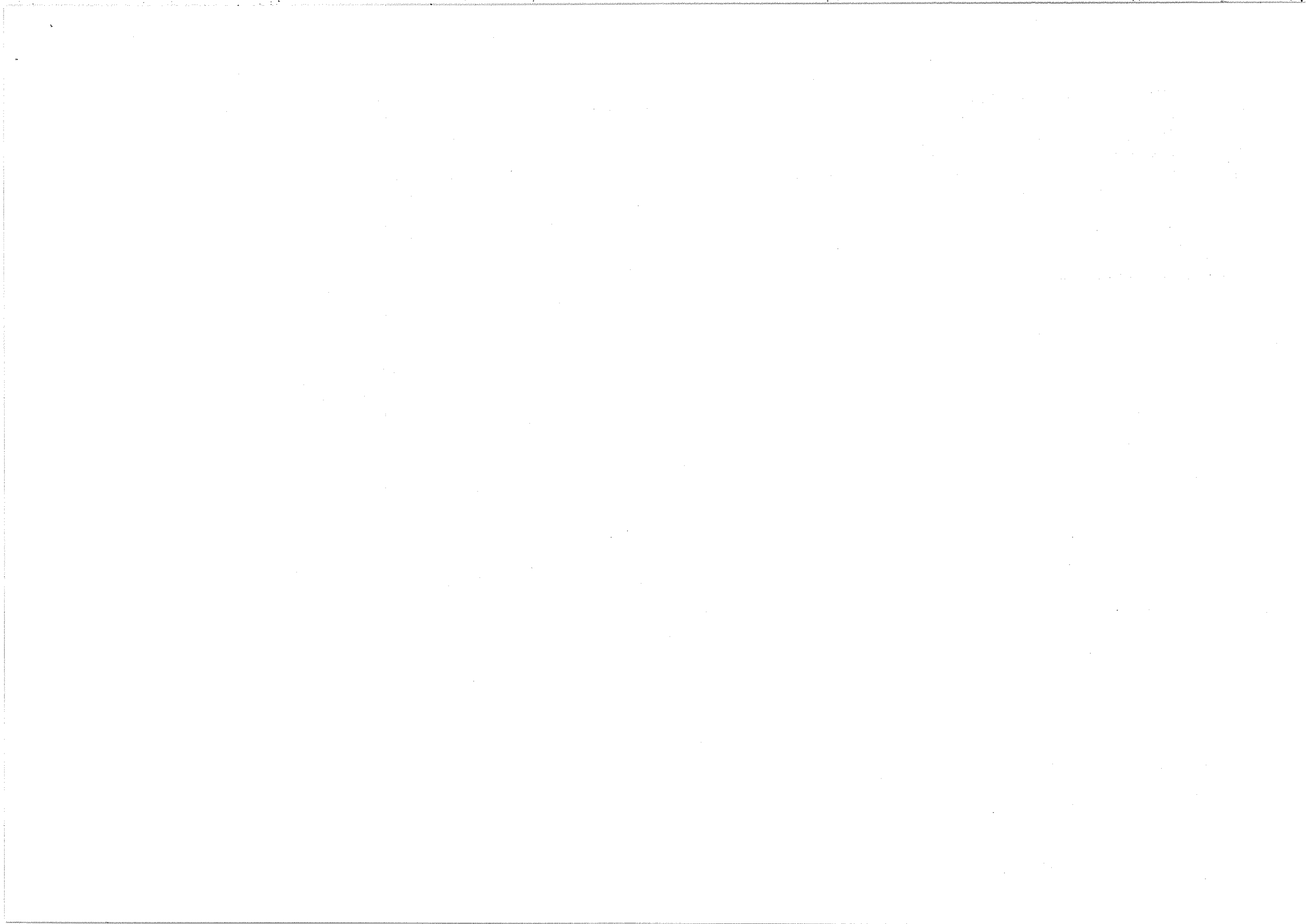
$$E = e^{-y} \Rightarrow E^* = e^* - y^*$$

$$y^* = E^* (1 + B^*) \overline{HK}^*$$

$$E^* = e^* - E^* (1 + B^*) \overline{HK}^* \Rightarrow E(z) = \frac{e(z)}{1 + [1 + B(z)] \overline{HK}(z)}$$

$$A(z) = E(z) (1 + B(z)) H(z)$$

$$F(z) = \frac{[1 + B(z)] H(z)}{1 + [1 + B(z)] \overline{HK}(z)}$$





## Deuxième partie

La décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{p(p+a)^2}$  conduit à :

$$\frac{1}{p(p+a)^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{p} - \frac{1}{a^2} \frac{1}{(p+a)^2} - \frac{1}{a} \frac{1}{(p+a)}$$

$$\frac{1}{p(p+a)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} \frac{z}{z-1} - \frac{1}{a^2} \frac{aT e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2} - \frac{1}{a^2} \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

D'où la transformée en  $z$  de la chaîne directe :

$$\overline{B_oH}(z) = \frac{H_o}{a^2} \frac{z [1 - e^{-aT}(1+aT)] + e^{-aT}(aT - 1 + e^{-aT})}{(z - e^{-aT})^2}$$

de la forme  $\frac{H_o}{a^2} \frac{\alpha z + \beta}{(z - \lambda)^2}$  avec :

$$\alpha = 1 - e^{-aT}(1+aT)$$

$$\beta = (aT - 1 + e^{-aT}) e^{-aT}$$

$$\lambda = e^{-aT}$$

Cas particulier:  $aT=1 \Rightarrow$

$$\alpha = 1 - 2e^{-1}$$

$$\beta = e^{-1}$$

$$\lambda = e^{-1}$$

$$\overline{B_oH}(z) = \frac{H_o}{a^2} \frac{(1 - 2e^{-1})z + e^{-1}}{(z - e^{-1})^2}$$

## 3. Etude de la stabilité: critère de Jury

équation caractéristique:  $1 + \overline{B_oH}(z) = 0$

$$(z - e^{-1})^2 + \frac{H_o}{a^2} [z(1 - 2e^{-1}) + e^{-2}] = 0$$

$$z^2 + z \left[ \frac{H_o}{a^2} (1 - 2e^{-1}) - 2e^{-1} \right] + e^{-2} + \frac{H_o}{a^2} e^{-2} = 0$$

### 3.1 critère de Jury:

$$* \frac{H_o}{a^2} e^{-2} + e^{-2} < 1 \rightarrow \frac{H_o}{a^2} < \frac{1 - e^{-2}}{e^{-2}} = 6,39$$

$$* D(1) > 0 \Rightarrow 1 + \frac{H_o}{a^2} (1 - 2e^{-1}) - 2e^{-1} + e^{-2} \left( 1 + \frac{H_o}{a^2} \right) > 0$$

toujours vérifié

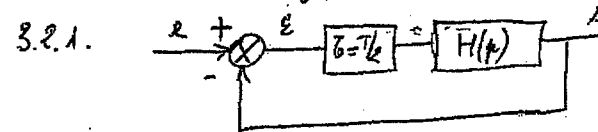
$$* D(-1) < 0 \Rightarrow 1 - \frac{H_o}{a^2} (1 - 2e^{-1}) + 2e^{-1} + e^{-2} \left( 1 + \frac{H_o}{a^2} \right) > 0$$

$$\rightarrow \frac{H_o}{a^2} < \frac{1 + 2e^{-1} + e^{-2}}{1 - 2e^{-1} - e^{-2}} = 14,5$$

en conclusion, il faut que:

$$\boxed{\frac{H_o}{a^2} < 6,39}$$

### 3.2. Approximation analogique



3.2.2. équation caractéristique:  $1 + z^{-1} H(p) = 0$

- 7.2.3. A partir des résultats précédents, déterminer la fonction de transfert  $C(z)$  du correcteur.
- 7.2.4. Ecrire la fonction de transfert en boucle fermée de l'asservissement ainsi corrigé.
- 7.2.5. En déduire la relation de récurrence liant l'entrée  $e$  et la sortie  $s$ .
- 7.2.6. On applique un échelon unitaire de position à l'entrée de l'asservissement de la figure 3. Calculer la valeur des quinze premiers échantillons de la sortie  $s$ . Représenter les variations de  $s(t)$ .

8. Conclusion.

Que peut-on dire de l'effet du correcteur :

- sur la précision,
- sur la stabilité,
- sur la rapidité de l'asservissement ?

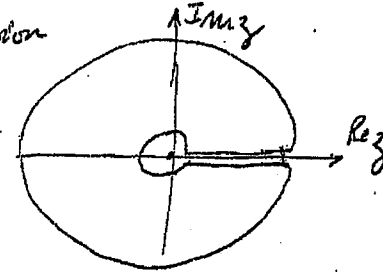
Module CP

Partiel de nov. 03.

Éléments de solution

première partie

1. Contour d'exclusion



$$2. \frac{1 - e^{-T\mu}}{\mu} H(\mu) \Rightarrow T(z) = (1 - z^{-1}) Tz \left[ \frac{H(\mu)}{\mu} \right]$$

3.  $A(\mu)$  est un retard pur ou un scalaire :  $A(\mu) = k$  ;  $A(\mu) = e^{-\theta\mu}$

4. La transformée en  $w$  ramène les singularités de l'intérieur du cercle trigonométrique du plan  $z$ , dans le demi-plan gauche. Le contour de Rouche peut alors être utilisé, comme en continu.

5.

$$z = e^{-\mu T} \Rightarrow z^* = e^{-\mu^* T}$$

$$\mu^* = z^* (1 + B^*) \overline{HK^*}$$

$$z^* = e^* - z^* (1 + B^*) \overline{HK^*} \Rightarrow z(z) = \frac{e(z)}{1 + [1 + B(z)] \overline{HK}(z)}$$

$$A(z) = z(z) [1 + B(z)] H(z)$$

$$F(z) = \frac{[1 + B(z)] H(z)}{1 + [1 + B(z)] \overline{HK}(z)}$$

2.3. En régime harmonique: 
$$e^{-j\omega T/2} \frac{H_0}{(a+j\omega)^2} = -1 \quad (4)$$

argument  $\rightarrow -\frac{\omega T}{2} - 2 \text{Arctg} \frac{\omega}{a} = -180^\circ$

équation non linéaire que l'on résout par approximations successives en continuant le tableau suivant:

$\frac{\omega}{a}$	$-\frac{\omega T}{2a} - 2 \text{Arctg} \frac{\omega}{a} + \pi$
--------------------	--

2.4. On recherche la valeur de  $\frac{\omega}{a}$  pour laquelle la colonne de droite conduit à la valeur 0. On trouve:

$$\frac{\omega}{a} \neq 1,92$$

2.5. Pour cette valeur de  $\frac{\omega}{a}$ , il faut que le module soit inférieur à 1.

$$\left| \frac{H_0}{(a+j\omega)^2} \right| < 1 \Rightarrow \frac{H_0}{a^2} < 1 + \frac{\omega^2}{a^2}$$

$$\boxed{\frac{H_0}{a^2} < 4,69}$$

les deux valeurs trouvées pour  $\frac{H_0}{a^2}$  sont différentes, mais de même ordre de grandeur. Pour savoir quelle est la méthode exacte, il faut trouver la suite pour une valeur intermédiaire (voir plus loin)

vision statique.

cas d'intégration dans la boucle: encou de position finie, encou de vitesse infini:

$$E = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \times e(z) \times \frac{1}{1 + G_0 H(z)}$$

$$4.1. E_f = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \times \frac{z}{z-1} \times \frac{1}{1 + \frac{H_0}{a^2} \frac{1-2e^{-1}+e^{-2}}{(1-e^{-1})^2}} \neq 0 \quad (5)$$

$$4.2. E_0 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \times \frac{Tz}{(z-1)^2} \times \frac{1}{1 + \frac{H_0}{a^2} \frac{1-2e^{-1}+e^{-2}}{(1-e^{-1})^2}} \text{ infinie}$$

5. Prévision dynamique:  $\frac{H_0}{a^2} = 5$

$$5.1. \frac{\Delta(z)}{e(z)} = \frac{G_0 H(z)}{1 + G_0 H(z)} = \frac{5[(1-2e^{-1})z + e^{-2}]}{(z-e^{-1})^2 + 5[(1-2e^{-1})z + e^{-2}]}$$

$$e^{-1} = 0,368 ; 1-2e^{-1} = 0,264 ; e^{-2} = 0,135$$

$$\frac{\Delta(z)}{e(z)} = \frac{1,32z^{-1} + 0,675z^{-2}}{1 + 0,585z^{-1} + 0,812z^{-2}}$$

5.2. Relation de récurrence:

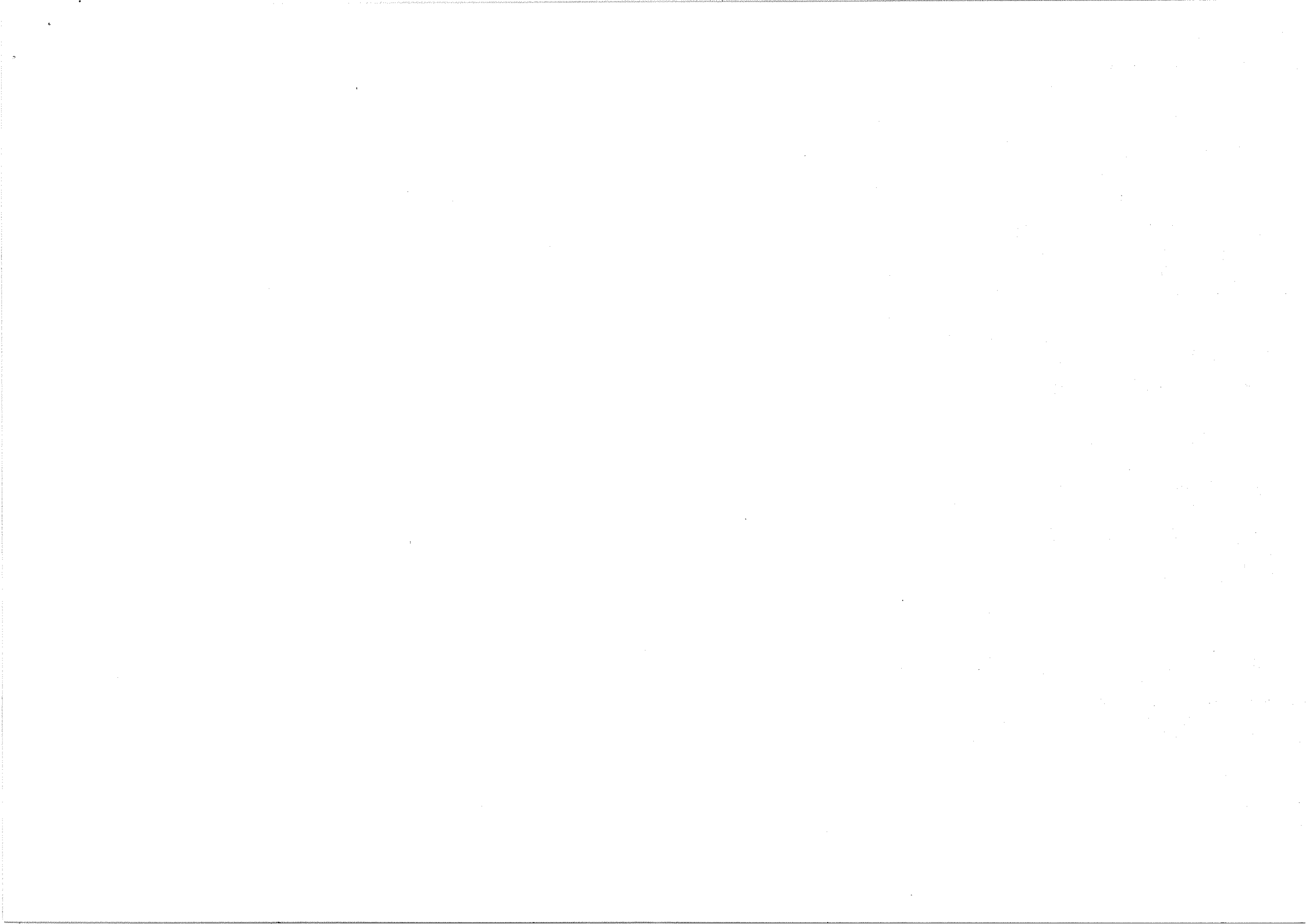
$$A_m + 0,585 A_{m-1} + 0,812 A_{m-2} = 1,32 e_{m-1} + 0,675 e_{m-2}$$

5.3.  $e_m = 0 ; m < 0$

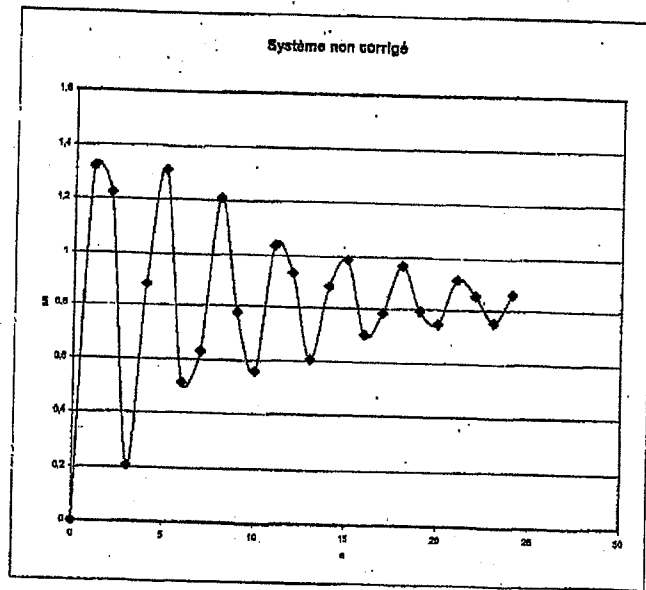
$$e_m = 1 ; m \geq 0$$

$$A_0 = 0 ; A_1 = 1,32 ; A_2 = 1,995 - 0,772 = 1,223$$

les autres échantillons se calculent en utilisant directement la récurrence. Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau ci-après. Les variations temporelles de la sortie découlent de ce tableau.



n	an
0	0
1	1,32
2	1,223
3	0,207705
4	0,88041658
5	1,31129984
6	0,51299133
7	0,6301246
8	1,20982915
9	0,77558936
10	0,56889977
11	1,03826508
12	0,93378832
13	0,60566259
14	0,88245127
15	0,98896798
16	0,70107933
17	0,78345412
18	0,96740782
19	0,79290168
20	0,74561737
21	0,91497768
22	0,85429676
23	0,75227452
24	0,86123044



5.4. La valeur retenue pour  $H_0/a^2$  confirme la pertinence du critère de Jury ( $H_0/a^2 = 6,39$ ) et infirme la méthode analogique ( $H_0/a^2 = 4,63$ )

La réponse séquentielle montre clairement les défauts suivants:

- \* mauvaise précision statique: le signal ne tend pas vers 1
- \* réponse fortement oscillante, mais amortie
- \* période des pseudo oscillations voisine de  $3T$ .

## 7. Mise en place du correcteur.

7.1.  $k_p$  et  $k_i$  représentent les coefficients de réglage des actions proportionnelle et intégrale

7.2.1. \*  $T_0 = 3T$  correspond à la pseudo période des oscillations du système non corrigé

\*  $k_0 = 1,28$  correspond à l'amplification à réaliser pour conduire le processus à l'auto-oscillation:

$$k_0 = \frac{6,39}{5} \rightarrow \text{condition de Jury}$$

5  $\rightarrow$  valeur retenue

7.2.2. Application de l'algorithme de Takahasi:

$$k_i = 0,54 \times \frac{1,28}{3T} = 0,23 \times \frac{1}{T}$$

$$k_p = 0,45 \times 1,28 - 0,5 \times 0,23 \times \frac{1}{T} \times T$$

$$k_p = 0,461.$$

Donc la relation de récurrence du correcteur:

$$u_n = u_{n-1} + 0,461 (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) + 0,23 \varepsilon_n$$

$$u_n = u_{n-1} + 0,691 \varepsilon_n - 0,461 \varepsilon_{n-1}$$

7.2.3. Fonction de transfert: déduite de la relation ci-dessus.

$$(1-z^{-1}) u(z) = (0,691 - 0,461 z^{-1}) \varepsilon(z)$$

$$c(z) = \frac{u(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{0,691 - 0,461 z^{-1}}{(1-z^{-1})}$$

3.2.3. En régime harmonique: 
$$e^{-j\omega T/2} \frac{H_0}{(a+j\omega)^2} = -1 \quad (4)$$

argument  $\rightarrow -\frac{\omega T}{2} - 2 \text{Arctg} \frac{\omega}{a} = -180^\circ$

équation non linéaire que l'on résout par approximations successives en continuant le tableau suivant:

$\frac{\omega}{a}$	$-\frac{\omega}{2a} - 2 \text{Arctg} \frac{\omega}{a} + \pi$
--------------------	--

3.2.4. On recherche la valeur de  $\frac{\omega}{a}$  pour laquelle la colonne de droite conduit à la valeur 0. On trouve:

$$\frac{\omega}{a} \neq 1,92.$$

3.2.5. Pour cette valeur de  $\frac{\omega}{a}$ , il faut que le module soit inférieur à 1.

$$\left| \frac{H_0}{(a+j\omega)^2} \right| < 1 \Rightarrow \frac{H_0}{a^2} < 1 + \frac{\omega^2}{a^2}$$

$\frac{\omega}{a} = 1,92$

$$\frac{H_0}{a^2} < 4,69$$

Les deux valeurs trouvées pour  $\frac{H_0}{a^2}$  sont différentes, mais de même ordre de grandeur. Pour savoir quelle est la méthode exacte, il faut calculer la sortie pour une valeur intermédiaire (voir plus loin)

révision statique.

Pas d'intégration dans la boucle: erreur de position finie, erreur de vitesse infinie:

$$E = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \times e(z) \times \frac{1}{1 + B_0 H(z)}$$

4.1. 
$$E_p = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \times \frac{z}{z-1} \times \frac{1}{1 + \frac{H_0}{a^2} \frac{1-2e^{-1}+e^{-2}}{(1-e^{-1})^2}} \neq 0 \quad (5)$$

4.2. 
$$E_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \times \frac{Tz}{(z-1)^2} \times \frac{1}{1 + \frac{H_0}{a^2} \frac{1-2e^{-1}+e^{-2}}{(1-e^{-1})^2}} \text{ infinie}$$

5. Prédiction dynamique:  $\frac{H_0}{a^2} = 5$

5.1. 
$$\frac{\Delta(z)}{e(z)} = \frac{B_0 H(z)}{1 + B_0 H(z)} = \frac{5[(1-2e^{-1})z + e^{-2}]}{(z-e^{-1})^2 + 5[(1-2e^{-1})z + e^{-2}]}$$

$$e^{-1} = 0,368 ; 1-2e^{-1} = 0,264 ; e^{-2} = 0,135$$

$$\frac{\Delta(z)}{e(z)} = \frac{1,32z^{-1} + 0,675z^{-2}}{1 + 0,585z^{-1} + 0,812z^{-2}}$$

5.2. Relation de récurrence:

$$\Delta_n + 0,585 \Delta_{n-1} + 0,812 \Delta_{n-2} = 1,32 e_{n-1} + 0,675 e_{n-2}$$

5.3.  $e_n = 0 ; n < 0$

$$e_n = 1 ; n \geq 0$$

$$\Delta_0 = 0 ; \Delta_1 = 1,32 ; \Delta_2 = 1,325 - 0,772 = 0,553$$

les autres échantillons se calculent en utilisant directement la récurrence. Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau ci-après. Les variations temporelles de la sortie découlent de ce tableau.

### 7.2.4. Fonction de transfert en boucle fermée

$$\frac{A(z)}{e(z)} = \frac{\overline{B_0 H}(z) C(z)}{1 + \overline{B_0 H}(z) C(z)}$$

$$\text{avec } \overline{B_0 H}(z) C(z) = 5 \times \frac{z(1-z^{-1}) + e^{-2}}{(z-e^{-1})^2} \times \frac{0,691z - 0,461}{(z-1)}$$

$$= 5 \frac{0,264z + 0,135}{(z-0,368)^2} \times \frac{0,691z - 0,461}{(z-1)}$$

d'où :

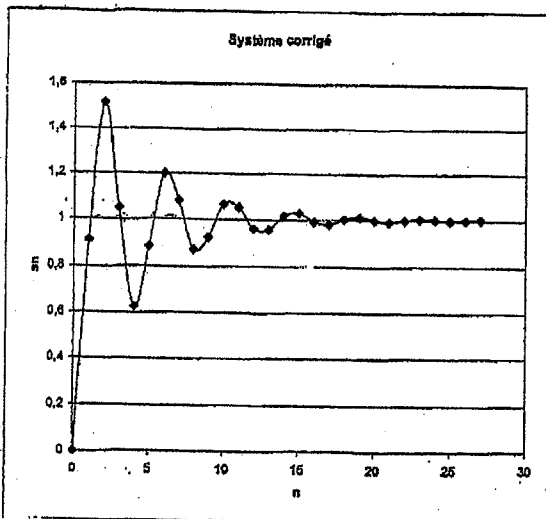
$$\frac{A(z)}{e(z)} = 5 \frac{0,182z^2 - 0,029z - 0,062}{z^3 - 0,826z^2 + 0,726z - 0,445} = \frac{0,91z^2 - 0,145z - 0,31}{z^3 - 0,826z^2 + 0,726z - 0,445}$$

### 7.2.5. Relation de récurrence :

$$A_n - 0,826 A_{n-1} + 0,726 A_{n-2} - 0,445 A_{n-3} = 0,91 A_{n-1} - 0,145 A_{n-2} - 0,31 A_{n-3}$$

### 7.2.6.

n	sn
0	0
1	0,91
2	1,517
3	1,047382
4	0,82374553
5	0,88487948
6	1,18915618
7	1,08064727
8	0,87079882
9	0,92335425
10	1,06637884
11	1,05297913
12	0,96146236
13	0,95924365
14	1,01788929
15	1,02721842
16	0,99135656
17	0,98106213
18	1,00274377
19	1,01216891
20	0,9996322
21	0,99208254
22	0,99814237
23	1,004878
24	1,00112695
25	0,99700924



### 8. Conclusion

- Le correcteur a amélioré la précision: l'erreur de position est nulle, du fait de l'intégrateur
- Le correcteur a amélioré la stabilité: le régime transitoire est plus amorti que précédemment.
- Le correcteur a diminué la rapidité de l'assèchement: la période des petites oscillations est plus grande que sans correcteur.

