

Dynamique quantique des systèmes à spectre fractal

Ariane SORET¹

encadrée par Eric AKKERMAN² et Evgeni GUREVICH²

¹ENS Cachan, France ; ² Technion - Israel Institute of Technology, Haifa, Israël
 Rapport de stage de recherche, Phytém master première année, effectué du
 21/04/2014 au 6/08/2014

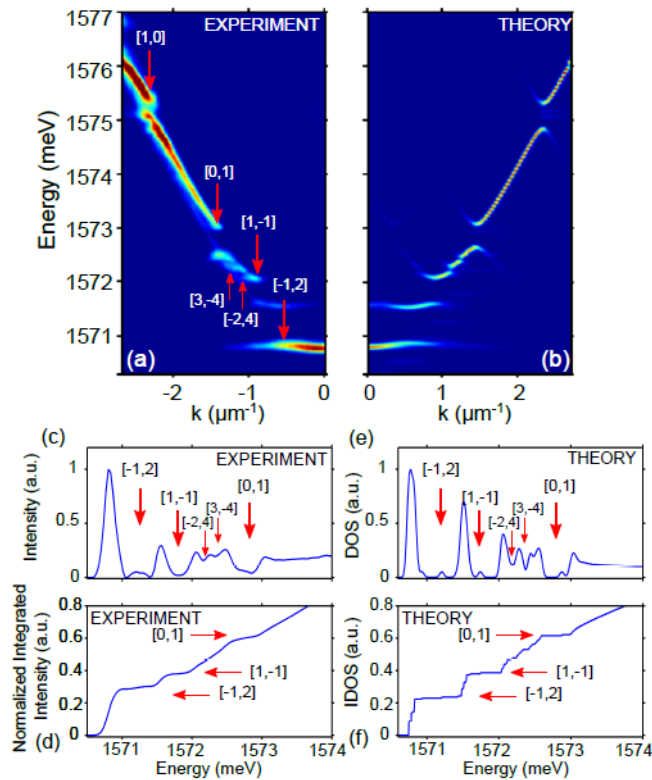


FIGURE 1 – (a) Mesure de l'émission en champ lointain spectralement résolue d'un gaz de polaritons (quasi-particules issues du couplage fort entre un mode optique d'une cavité optique et une paire électron-trou) soumis à un potentiel 2D quasi-périodique ; les positions des gaps, associés à un couple d'entiers $\{p, q\}$, sont indiquées par des flèches rouges. (b) Résultats numériques correspondants obtenus en modélisant le potentiel par un potentiel effectif 1D. (c) Mesure du spectre d'émission $I(\epsilon)$. (d) Intensité d'émission intégrée et normalisée $\int_{E_0}^{\epsilon} I(\epsilon') d\epsilon'$. (e) Densité d'états calculée et traitée pour pouvoir être comparée à $I(\epsilon)$ en (c). (f) Calcul de la densité d'états intégrée. Source : [1]

Table des matières

1	Introduction	3
2	Préliminaires mathématiques	3
2.1	Définition des fractales	3
2.2	Ensemble de Cantor	4
2.3	Dimension fractale	4
2.4	Propriétés d'échelle et oscillations log-périodiques	4
3	Exemple expérimental : potentiel de Fibonacci	5
3.1	Présentation de l'expérience	5
3.2	Étude théorique - Résultats expérimentaux et numériques	6
4	Étude théorique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor	7
4.1	Définition d'une mesure appropriée	8
4.2	Densité d'états intégrée	8
4.3	Fonction de corrélation	9
4.3.1	Expression analytique de $C(t)$ dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor	10
4.4	Rapport de participation (participation ratio)	12
4.4.1	Majoration de $\int \phi(x, \epsilon)^* \phi(x', \epsilon) d\mu(\epsilon)$	14
4.4.2	Supposer $\overline{\phi(0, \epsilon)^* \phi(x, \epsilon)} = f\left(\frac{x}{l_n}\right)$	14
4.5	Émission spontanée	14
5	Bilan et perspectives	15
6	Résumé - Abstract	16
7	Annexes	17
7.1	Log-périodicité des fonctions vérifiant $f(x) = \frac{1}{b}f(ax) + g(x)$	17
7.2	Propriété d'échelle de la mesure $d\mu$	18
7.3	Calcul de la fonction de corrélation dans la cas où le spectre est un ensemble de Cantor	18
7.3.1	Comportement asymptotique des coefficients	21
8	Bibliographie	24

1 Introduction

La dynamique et les propriétés de transport des systèmes quantiques dépendent de leur profil spectral. Or, un potentiel variant spatialement induit une modification de la densité d'états des modes propres du système. Selon la géométrie du potentiel, on peut obtenir un ensemble très riche de distributions spectrales, regroupées en trois catégories [21] : spectre continu, discret ou continu singulier. Les cas des spectres continus et discrets sont plutôt bien connus (le spectre d'un potentiel périodique, par exemple, est bien décrit par le théorème de Bloch). Le cas singulier continu, dont les fractales font partie, est un profil qui apparaît pour une large gamme de potentiels et constitue le cas générique, mais est beaucoup moins bien compris, quoique faisant l'objet de nombreux travaux, tant dans le domaine des mathématiques que de la physique [1],[2] (l'intérêt pour ce type de spectre est apparu notamment avec la découverte des quasi-cristaux, structures quasi-périodiques associées à un spectre singulier continu [3]).

L'objet de mon stage est d'étudier la dynamique des systèmes quantiques à spectre singulier continu fractal.

Un ensemble particulièrement intéressant et largement étudié de potentiels quasi-périodiques dont le spectre est fractal sont les potentiels construits à partir d'une suite de Fibonacci [1]. Dans ce cas, il a été démontré qu'ils sont de type ensemble de Cantor [4], c'est-à-dire fractals.

Le point de départ de mon stage furent les expériences réalisées dans le Laboratoire de Photonique et de Nanostructures (CNRS, Marcoussis, France), en partenariat avec mon équipe de recherche d'accueil au Technion, et l'étude numérique effectuée au Technion sur la dynamique d'un paquet d'onde construit à partir des modes des polaritons confinés dans une cavité type Fibonacci ; le spectre des polaritons étant fractal, il possède une invariance d'échelle, ce qui devrait avoir un impact sur les propriétés physiques du système. Plus précisément, les manipulations visaient à démontrer l'existence d'oscillations log-périodiques pour certaines quantités spectrales et dynamiques, signature de la structure fractale du spectre ; pour la première fois, ce comportement particulier a été mis en évidence [1].

L'objectif de mon stage est de travailler sur la dynamique d'un système quantique dans le cas particulier où le spectre est un ensemble de Cantor (un cas particulier de fractale). Il s'agit de comprendre comment la structure fractale du spectre se répercute sur la dynamique du système, de déterminer quelles quantités physiques mesurables portent la trace de cette structure fractale et d'établir l'expression analytique des quantités pertinentes. Cette étude vient conforter les observations faites grâce aux expériences du LPN, et devrait donner de nouvelles pistes pour les expériences.

Après le rappel de quelques propriétés générales sur les fractales et la présentation de l'expérience du LPN, je me concentrerai sur l'étude analytique et numérique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor. Je tâcherai finalement de présenter les nouvelles perspectives de recherche au terme de ce travail.

2 Préliminaires mathématiques

2.1 Définition des fractales

Il est assez difficile de définir précisément de qu'est une fractale. Le terme "fractal" (du latin *fractus*, "brisé") a été introduit par Mandelbrot pour définir les objets tellement irréguliers qu'ils sortent du cadre de la géométrie classique ; selon sa formulation¹ : "*une fractale est une forme composée de parties similaires au tout d'une façon ou d'une autre*". Dans ce rapport, nous nous intéresserons aux fractales vérifiant une propriété d'échelle : si l'on "zoom" sur une zone particulière, on retrouve, dans les mêmes proportions, la figure de départ. On considérera de plus que les fractales sont plongées dans un espace euclidien.

Illustrons cette définition par un exemple : le "triangle de Sierpinski". Partant d'un triangle équilatéral plein, on joint deux à deux les milieux des côtés et l'on supprime le petit triangle central ainsi formé. En itérant ce processus dans chacun des trois triangles pleins restant, on obtient à

1. Mandelbrot, correspondance, 1987

la limite un objet vérifiant une propriété d'échelle : si l'on zoom sur l'un des triangles pleins, on observe la même structure (fig. 2).

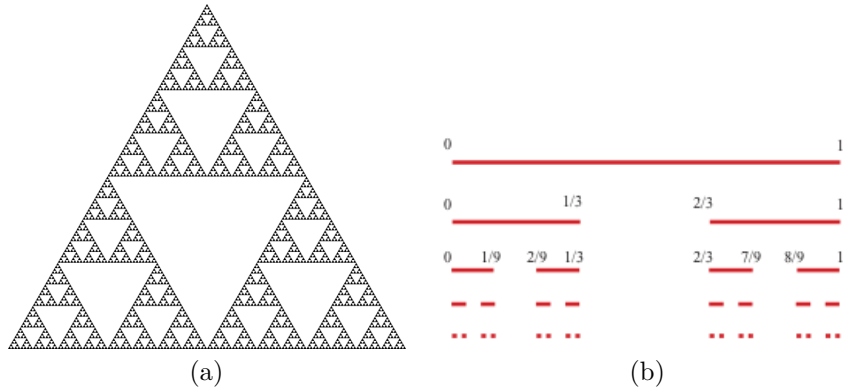


FIGURE 2 – (a) Triangle de Sierpinski (source : commons.wikimedia.org). (b) Construction d'un ensemble de Cantor triadique (source : accromath.uqam.ca).

2.2 Ensemble de Cantor

Un autre exemple classique de fractale est l'ensemble de Cantor triadique, sur lequel j'ai principalement travaillé (le lien avec la physique apparaîtra plus clairement ultérieurement).

Un ensemble de Cantor triadique se construit itérativement (fig. 2) : partant d'un segment $[0, 1]$, on le divise en trois segments égaux et l'on retire la partie centrale. On itère cette opération sur les deux segments restants, et ainsi de suite. Après une infinité d'itérations, il reste un ensemble (de mesure nulle au sens de Lebesgue) composé de points isolés.

2.3 Dimension fractale

Afin de caractériser une fractale, l'une des premières choses que l'on souhaite déterminer est sa dimension (dimension de Hausdorff² [5]).

Intuitivement, la dimension d'un espace ou d'un objet géométrique peut s'interpréter comme le nombre réel (positif) d tel qu'un volume élémentaire v soit de la forme : $v = l^d$, où l est une longueur au sens euclidien.

Pour des structures fractales, la dimension n'est en général pas entière ; ceci a des conséquences profondes sur les propriétés physiques de systèmes présentant des structures fractales [6].

La dimension d'un ensemble de Cantor triadique, qui nous intéresse particulièrement, vaut $d = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

2.4 Propriétés d'échelle et oscillations log-périodiques

Ce paragraphe purement mathématique présente une méthode de calcul qui sera abondamment utilisée par la suite, pour démontrer la log-périodicité de diverses fonctions.

Les fractales auto-similaires, que l'on étudie ici, possèdent une invariance d'échelle, c'est-à-dire qu'en zoomant avec un certain facteur sur une partie de l'ensemble, on retrouve la même forme que le tout, dans les mêmes proportions.

Mathématiquement, une fonction f ayant une telle propriété d'échelle vérifie une relation de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{b} f(ax)$$

pour un certain couple de réels (a, b) , $b \neq 0$. On vérifie facilement que cela implique que f soit de la forme :

$$f(x) = x^{\ln(b)/\ln(a)} g\left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)$$

2. La dimension de Hausdorff d'un espace euclidien de dimension euclidienne d , par exemple, vaut également d .

avec g une fonction 1-périodique : $g(x+1) = g(x)$. En effet :

- si $b = 1$, on définit une fonction h telle que : $h(x) = f(e^{x \ln(a)})$ (changement de variable), et l'on vérifie que :

$$h(x+1) = f(e^{(x+1) \ln(a)}) = f(e^x a) = f(e^x) = h(x)$$

f est donc bien de la forme : $f(x) = h\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)$ avec h 1-périodique.

- si $b \neq 1$, on se ramène au cas précédent en remarquant que $k(x) = f(x)x^{-\ln(b)/\ln(a)}$ vérifie $k(ax) = k(x)$.

Il est également important de noter que les fonctions f vérifiant une relation du type :

$$f(x) = \frac{1}{b}f(ax) + g(x)$$

avec g ayant certaines propriétés (définies en 7.1)) est également de la forme :

$$f(x) = x^{\ln(b)/\ln(a)} G\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)$$

avec G 1-périodique.

La démonstration est un peu plus technique et fait appel aux transformées de Mellin ; elle est donnée en annexe (7.1).

3 Exemple expérimental : potentiel de Fibonacci

Le point de départ de mon stage fut les expériences réalisées par l'équipe de J. Bloch (2014), au LPN (Laboratoire de Photonique et de Nanostructures, CNRS, Marcoussis, France) [1].

Le but de l'expérience est de réaliser et d'étudier un système physique présentant une structure fractale. À partir d'une cavité unidimensionnelle quasi-périodique, décrite par une suite de Fibonacci, on étudie les modes d'un gaz de polaritons qui y sont confinés. Bien que de nombreuses expériences d'optique dans des cavités de Fibonacci aient déjà été réalisées dans le passé [17], la signature du spectre fractal au travers des oscillations log-périodiques de la densité d'états intégrée n'avait jusque là pas été observée.

3.1 Présentation de l'expérience

Les polaritons de cavité sont des quasi-particules issues du couplage fort entre un mode optique d'une cavité optique et une paire électron-trou (appelée exciton) confinée dans un puits quantique. Découverts récemment (Hopfield, 1958, [15]), ils font l'objet d'un grand intérêt depuis quelques décennies³ [16]. Sur le plan expérimental, ils offrent des possibilités expérimentales que ne permet pas la photonique sur des quasi-cristaux, raison pour laquelle ils sont utilisés ici.

Ici, les polaritons sont confinés dans une cavité plane $\lambda/2$, d'indice de réfraction n ; le confinement du champ électromagnétique dans la cavité le long de l'axe z est assuré par deux miroirs de Bragg. La longueur de la cavité dans la direction x vaut L ; la largeur est modulée de façon quasi-périodique, suivant une suite de Fibonacci (fig. 3). On peut considérer que la cavité est composée d'une séquence de blocs élémentaires ou "lettres" d'égales longueurs, mais de deux profondeurs différentes dans la direction y , A et B. Idéalement, la cavité est composée d'une séquence infinie S_∞ de lettres, obtenue en itérant la relation de récurrence suivante (inspirée de la relation de récurrence qui définit une suite de Fibonacci⁴) :

$$S_{j>2} = [S_{j-1}S_{j-2}] \text{ et } S_1 = B, S_2 = A$$

où $[S_{j-1}S_{j-2}]$ désigne la concaténation des deux sous-séquences S_{j-1} et S_{j-2} . Le nombre F_j de lettres de la séquence S_j est le j -ième terme de la suite de Fibonacci (*cf.* note en bas de page). À

3. pour la compréhension des fluides quantiques lumineux en milieu non linéaires [16].

4. La suite de Fibonacci $(F_j)_j$ est définie par la relation de récurrence : $F_j = F_{j-1} + F_{j-2}$ pour $j > 2$, avec $F_0 = F_1 = 1$

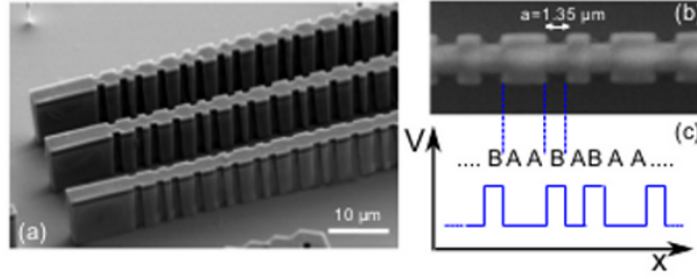


FIGURE 3 – (a) Image de trois cavités modulées selon une suite de Fibonacci. (b) Zoom sur une cavité, montrant la forme des lettres A et B . (c) Représentation schématique du potentiel correspondant à la forme de la cavité, modulée latéralement. Source : [4]

la limite, la séquence S_∞ est quasi-périodique. Nous justifierons dans le paragraphe suivant que le mouvement longitudinal des polaritons est ainsi modulé par un potentiel $V(x)$ quasi-périodique.

Expérimentalement, on fabrique une cavité finie selon une séquence S_j , mais les résultats expérimentaux sont en accord avec les simulations numériques issues de modèles théoriques pour un spectre fractal.

3.2 Étude théorique - Résultats expérimentaux et numériques

La physique des polaritons est complexe et dépasse le cadre de ce rapport de stage. Nous ne donnerons que les propriétés essentielles à la compréhension de l'expérience.

Les polaritons sont issus du couplage fort entre un mode optique et les excitons ; expérimentalement, on mesure l'émission en champ lointain des polaritons ; cependant, la nature du couplage assure que les états propres des polaritons ont le même comportement spatial que les états propres des photons.

Soit $\psi(x, y, z)$ la fonction décrivant un mode propre des photons de la cavité. Le confinement étant plus fort dans la direction z , on cherche une solution séparable entre les coordonnées verticales et horizontales. Le confinement des photons dans la direction z impose que la composante k_z du vecteur d'onde vérifie : $k_z = \frac{n\pi}{\lambda/2}$, $n \in \mathbb{Z}^*$. Ceci conduit à la relation de dispersion suivante [16] :

$$\omega(k) = \frac{c}{n} \sqrt{k_z^2 + (k_x^2 + k_y^2)} \sim \omega_0 + \frac{\hbar(k_x^2 + k_y^2)}{2m_{ph}}$$

avec ω la pulsation associée au photon et $m_{ph} = \frac{\hbar n k_z}{c}$ la masse effective du photon à la fréquence $\omega_0 = \frac{ck_z}{n}$, dite de cut-off. La recherche de solution aux variables séparables conduit à l'équation d'onde suivante :

$$E\psi(x, y) = -\frac{\hbar^2}{2m_{ph}} \Delta_\perp \psi(x, y)$$

avec $\Delta_\perp = \partial_x + \partial_y$ et $E \sim \hbar\omega - \frac{ck_z}{n}$.

Trouver les modes propres du problème 2D décrit par l'équation ci-dessus est facilement réalisable numériquement. Toutefois, il est préférable de se ramener à un problème 1D afin d'avoir une meilleure intuition et compréhension du système, et de pouvoir appliquer des méthodes analytiques (théorème de gap-labelling) et numériques non disponibles à 2D.

Après un calcul que nous ne détaillerons pas ici [1], et avec certaines approximations, le problème se réduit au problème 1D suivant :

$$E\psi(x) = \frac{\hbar^2}{2m_{ph}} \left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x)$$

où $V(x)$ est un potentiel effectif 1D, quasi-périodique.

Le Hamiltonien décrivant le système est donc de la forme : $H = H_0 + V(x)$ avec $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_{ph}} \frac{d^2}{dx^2}$.

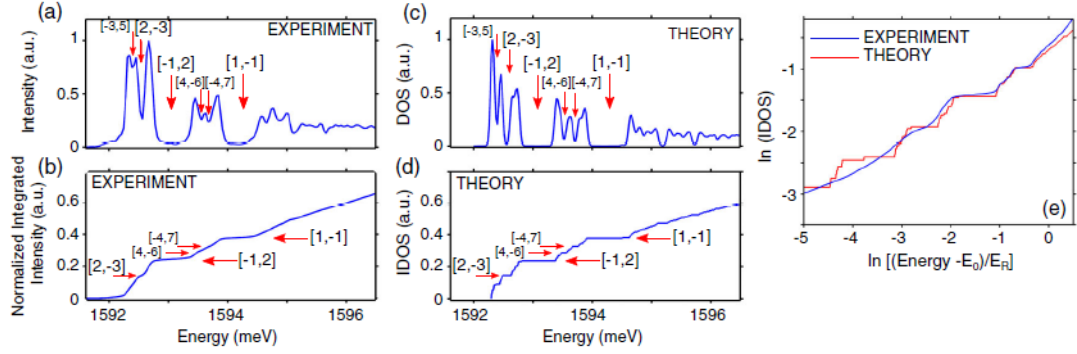


FIGURE 4 – (a) Mesure de l’intensité totale émise (intégrale angulaire) $I(\epsilon')$ de la cavité quasi-périodique; (b) Intégrale spectrale de l’intensité $\int_{E_0}^{\epsilon} I(\epsilon') d\epsilon'$ (E_0 énergie minimale); Calcul de la densité d’états normalisée (DOS) (c) et de l’intégrale de la densité d’états (IDOS) (d); (e) Oscillations log-périodiques de l’IDOS au voisinage de E_0 : échelle log-log, courbe numérique (rouge) et expérimentale (bleue) (normalisée à $E_R = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8a^2 m_p}$, m_p la masse du polariton. Source : [4]

Le spectre en énergie associé au potentiel $V(x)$ est singulier-continu et présente une structure de type Cantor [1].

De plus, le théorème de gap-labelling [7] permet de caractériser la densité des gaps⁵ : dans le cas présent, il existe une relation biunivoque entre les pics de Bragg (correspondant aux gaps dans le spectre) et $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: chaque pic peut être associé à un couple d’entiers $\{p, q\}$ de telle sorte que le nombre d’onde correspondant soit $k = Q_{p,q} = \frac{2\pi}{a}(p + q\sigma^{-1})$, avec $\sigma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d’or. Ce théorème permet également de prédire la valeur de l’intégrale de la densité d’états $N(\epsilon)$ aux énergies de gap :

$$N(\epsilon) = E_{Q_{p,q}/2} = p + q\sigma^{-1} \bmod 1$$

Ces résultats, établis pour une cavité infinie, se vérifient expérimentalement bien pour une cavité finie.

Les résultats expérimentaux et numériques obtenus mettent en évidence l’existence d’oscillations log-périodiques pour la densité d’états intégrée, pour la fonction de corrélation, ainsi que pour le rapport de participation.

La figure (4) présente le graphe de la densité d’états intégrée, pour une cavité de 233 lettres. On note que la prédiction théorique de la valeur de $N(\epsilon)$ aux différents gaps s’accorde bien avec l’expérience.

4 Étude théorique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor

La principale partie de mon travail a été d’étudier analytiquement le cas d’un système dont le spectre en énergie est un ensemble de Cantor triadique (*cf.* 2.2). Les résultats théoriques et expérimentaux déjà obtenus indiquent notamment que la présence d’un spectre fractal se manifeste au travers du comportement log-périodique de certaines quantités, telle la densité d’états intégrée. Il s’agit de comprendre l’origine de ce comportement particulier, de déterminer quelles sont les quantités physiques qui en portent la trace et de parvenir à une expression analytique de ces quantités.

Cette étude permettra ensuite de faire des simulations numériques et de concevoir de nouvelles expériences pour étayer la théorie.

Dans la suite, on supposera que l’on étudie un système caractérisé par une fonction d’onde $|\psi(t)\rangle$ et régi par un Hamiltonien H , inconnu, dont nous supposons uniquement que le spectre

5. *Remarque* :Le spectre en énergie, complémentaire de l’ensemble des gaps, est singulier-continu, car il existe une infinité de couples (p, q) tels que $p + q\sigma^{-1} \bmod 1 \in [0, 1]$.

est un ensemble de Cantor triadique K . On prendra pour alléger les notations $\hbar = 1$. L'évolution temporelle du paquet d'onde, dont l'état initial est $|\psi(t=0)\rangle = |\psi_0\rangle$, est donnée par la relation :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\psi_0\rangle$$

On utilisera également la décomposition spectrale de $|\psi(t)\rangle$ sur les fonctions propres de H , $\{|\phi(\epsilon)\rangle\}$ (formant une base orthonormée) :

$$|\psi(t)\rangle = \int_K g(\epsilon)e^{-i\epsilon t}|\phi(\epsilon)\rangle d\mu(\epsilon)$$

où $g(\epsilon)$ est la projection de $|\psi_0\rangle$ sur $|\phi(\epsilon)\rangle$, et $d\mu(\epsilon)$ est une mesure définie sur le spectre et prenant en compte la densité d'états.

4.1 Définition d'une mesure appropriée

La première difficulté est la définition d'une mesure adéquate pour caractériser le spectre. Un ensemble de Cantor est un ensemble de points isolés; sa mesure au sens de Lebesgue est donc nulle. Toutefois, si l'on envisage un système dont le spectre est un ensemble de Cantor, la somme des énergies (avec dégénérescence) est non nulle, donc l'intégrale de la densité d'état sur le spectre doit être non nulle. On comprend cependant intuitivement que pour que l'intégrale de la densité d'états $\rho(\epsilon)$ sur un ensemble de mesure nulle (un ensemble de points ici) soit non nulle, cette densité d'états doit être infinie en les points du spectre. De fait, ρ n'est pas définie pour un ensemble de Cantor.

On suppose de plus ici que l'intégrale de la densité d'états sur le spectre est finie.

Afin de modéliser cette situation, j'ai défini une mesure $d\mu$ appropriée; abusivement, $d\mu$ est une mesure qui vérifie la relation : $d\mu(\epsilon) = \rho(\epsilon)d\epsilon$, c'est-à-dire que la densité d'état est contenue dans la définition de la mesure.

Supposons pour simplifier que l'intégrale de $d\mu$ sur un Cantor K soit égale à 1 : $\int_K d\mu = 1$. On procède par itération : partant d'un segment $[0, 1]$, on pose $\rho = 1$ partout; l'intégrale sur le segment vaut bien 1. On divise ensuite le segment en trois, on retire la partie centrale, et l'on définit ρ égal à $\frac{3}{2}$ sur $[0, \frac{1}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$ et 0 sur $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$; on a encore $\int_0^1 \rho(x)dx = 1$.

On peut ainsi définir $d\mu$ comme une limite : pour toute fonction f définie sur $[0, 1]$, l'intégrale de f sur le Cantor K est :

$$\int_K f(x)d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \sum_{P_n} \int_{a_j}^{a_j+3^{-n}} f(x)dx$$

où P_n désigne l'ensemble des bords gauche des segments restant après n itérations dans la construction de l'ensemble de Cantor.

On démontre facilement (cf. annexe 7.2) que cette mesure vérifie la propriété d'échelle suivante :

$$\int_K f(x)d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_K f\left(\frac{x}{3}\right) d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_K f\left(\frac{x+2}{3}\right) d\mu(x) \quad (1)$$

Cette définition de $d\mu$ a permis d'effectuer le calcul analytique de fonctions intéressantes pour l'étude de systèmes présentant une structure fractale.

4.2 Densité d'états intégrée

Afin de tester si cette mesure était appropriée, je l'ai appliquée pour calculer numériquement, avec Matlab, l'intégrale de la densité d'états : $N(\epsilon) = \int_{\text{spectre}} \theta(\epsilon - \epsilon')d\mu(\epsilon')$, où θ est la fonction de Heaviside (voir graphe fig. (5)).

On démontre aisément que $N(\epsilon)$ est log-périodique :

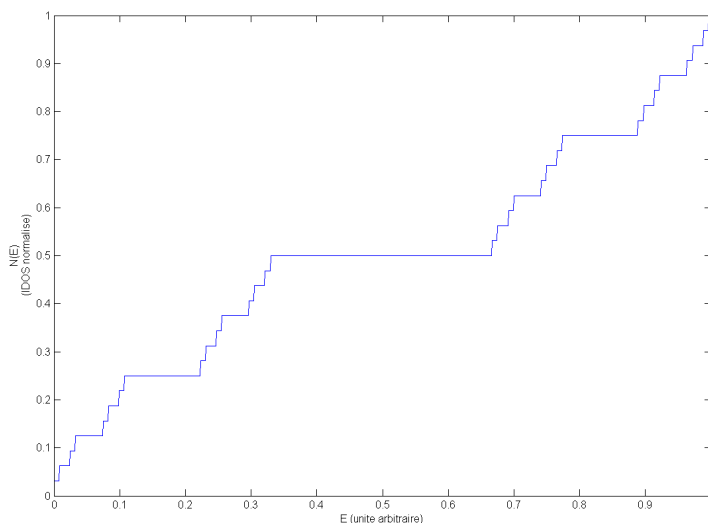


FIGURE 5 – Calcul numérique de la densité d'états intégrée dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor triadique. Abscisses : énergie E , unités arbitraires. Ordonnées : $N(E)$.

$$\begin{aligned}
 N(\epsilon) &= \int_{\text{spectre}} \theta(\epsilon - \epsilon') d\mu(\epsilon') \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\text{spectre}} \theta\left(\epsilon - \frac{\epsilon'}{3}\right) d\mu(\epsilon') + \frac{1}{2} \int_{\text{spectre}} \theta\left(\epsilon - \frac{\epsilon' + 2}{3}\right) d\mu(\epsilon') \\
 &= \frac{1}{2} N\left(\frac{\epsilon}{3}\right) + g(\epsilon)
 \end{aligned}$$

D'après les préliminaires mathématiques, ceci prouve que $N(\epsilon) = \epsilon^\alpha G(\ln(\epsilon))$ avec G un fonction périodique. Le graphe de la fonction est à rapprocher des graphes numériques et expérimentaux obtenus pour la cavité de Fibonacci ; les similarités observées semblent indiquer que cette mesure est pertinente.

4.3 Fonction de corrélation

Une des première des quantités auxquelles je me suis intéressée est la fonction de corrélation, ou probabilité de retour à l'origine, $C(t)$.

Il est naturel d'étudier cette fonction dans le cadre de problèmes de dynamique quantique, au même titre par exemple que le rapport de participation (qui sera discuté dans la section suivante) ou que le déplacement moyen quadratique⁶ $\langle r^2(t) \rangle$. Par définition, $C(t)$ est la moyenne temporelle de la probabilité $p(t) = |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2$ d'observer le paquet d'onde dans sa configuration initiale après un temps t :

$$C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi(0) | \psi(t') \rangle|^2 dt'$$

On pourrait directement étudier $p(t)$ pour obtenir des informations sur l'évolution temporelle du paquet d'onde, cependant cette quantité présente en général des oscillations rapides (presque périodiques) qui cacheraient les effets dus au spectre fractal, que l'on souhaite observer. Sa moyenne temporelle donne, en revanche, des résultats intéressants comme nous le verrons plus loin.

Les résultats numériques dans le cas de la cavité de Fibonacci semblent de plus indiquer que cette fonction est de la forme : $C(t) = t^{-d_c} g(\ln(t/\tau))$, où g est périodique, τ une échelle de temps

6. Cette dernière quantité ne semble néanmoins pas pertinente pour mettre en évidence la structure fractale, ainsi que les résultats numériques obtenus avec la cavité de Fibonacci (section 2) le suggèrent.

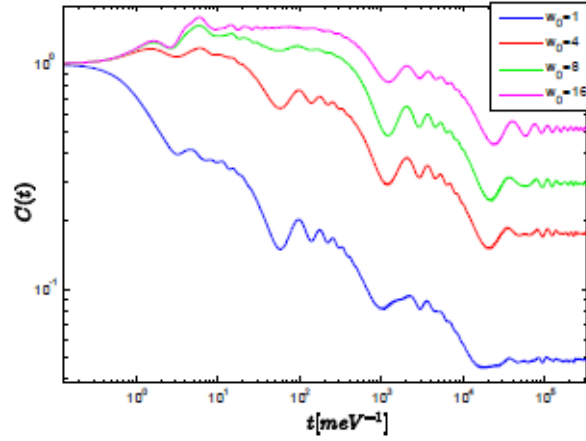


FIGURE 6 – Fonction de corrélation du paquet d’onde dans la cavité de Fibonacci (*cf.* section 3) ; résultats numériques pour un paquet d’onde initial gaussien : $\psi(x, t = 0) \sim e^{-2(x-x_0)^2/w_0^2}$. Les différentes courbes correspondent à des valeurs de w_0 différentes, x_0 étant identique.

caractéristique et d_c est un réel positif (nous montrerons qu’il s’agit de la dimension fractale de K). La figure (6) présente les résultats numériques obtenus pour une cavité de 233 lettres.

4.3.1 Expression analytique de $C(t)$ dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor

Avec les notations introduites au début du paragraphe, on exprime $|\psi(t)\rangle$ dans une base ortho-normale d’états propres $\{|\phi(\epsilon)\rangle\}$ du Hamiltonien H :

$$|\psi(t)\rangle = \int_K g(\epsilon) e^{-i\epsilon t} |\phi(\epsilon)\rangle d\mu(\epsilon)$$

On suppose de plus ψ normalisée :

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle &= \int_{K \times K} g(\epsilon)^* g(\epsilon') \langle \phi(\epsilon) | \phi(\epsilon') \rangle e^{i(\epsilon - \epsilon')t} d\mu(\epsilon) d\mu(\epsilon') \\ &= \int_K |g(\epsilon)|^2 d\mu(\epsilon) \\ &= 1 \end{aligned}$$

On peut alors définir une nouvelle mesure $d\tilde{\mu}(\epsilon) = |g(\epsilon)|^2 d\mu(\epsilon)$; pour simplifier, on considérera que cette mesure est celle définie à la section précédente.

Maintenant :

$$\begin{aligned}
C(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi(0) | \psi(t') \rangle|^2 dt' \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_K |g(\epsilon)|^2 e^{-i\epsilon t'} d\mu(\epsilon) \right|^2 dt' \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \iint_{K \times K} e^{i(\epsilon' - \epsilon)t'} d\tilde{\mu}(\epsilon) d\tilde{\mu}(\epsilon') \\
&= \frac{1}{t} \iint_{K \times K} \frac{e^{i(\epsilon' - \epsilon)t} - 1}{i(\epsilon' - \epsilon)} d\tilde{\mu}(\epsilon) d\tilde{\mu}(\epsilon') \\
&= \iint_{K \times K} \text{sinc}((\epsilon' - \epsilon)t) d\tilde{\mu}(\epsilon) d\tilde{\mu}(\epsilon') + i \underbrace{\iint_{K \times K} \frac{\sin^2((\epsilon' - \epsilon)t/2)}{(\epsilon' - \epsilon)t}}_{\text{nul par symétrie}}
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$C(t) = \iint_{K \times K} \text{sinc}((\epsilon' - \epsilon)t) d\tilde{\mu}(\epsilon) d\tilde{\mu}(\epsilon') \quad (2)$$

Avec la définition de $d\mu$ et la propriété d'échelle (1), on parvient à l'expression suivante (le détail du calcul est donné en annexe 7.3) :

$$C(t) = \frac{t^{-d}}{\ln(3)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n \exp -2i\pi n \ln(t)/\ln(3) \int_0^t u^{d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1} \text{sinc}(u) du \quad (3)$$

avec $d = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ et $\epsilon_n = \int_{K \times K} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y+2|^{d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)}}}$.

L'intégrale $\int_0^t u^{d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1} \text{sinc}(u) du$ converge vers $\int_0^\infty u^{d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1} \text{sinc}(u) du$; on peut donc, pour t suffisamment grand, remplacer \int_0^t par \int_0^∞ . Comme de plus

$$\int_0^\infty u^{d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1} \text{sinc}(u) du = \sin \left(\frac{\pi}{2} \left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1 \right) \right) \Gamma \left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1 \right)$$

avec Γ la fonction gamma de Euler, on obtient finalement :

$$C(t) = \frac{t^{-d}}{\ln(3)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n t^{-\frac{2i\pi n}{\ln(3)}} \sin \left(\frac{\pi}{2} \left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1 \right) \right) \Gamma \left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1 \right) \quad (4)$$

dans le cas normalisé ($\hbar = 1$, énergie maximale accessible $E = 1$), soit dans le cas général :

$$C(t) = \left(\frac{E}{u.e.} \right)^2 \left(\frac{Et}{\hbar} \right)^{-d} \sum_n \frac{\epsilon_n}{\ln(3)} \left(\frac{Et}{\hbar} \right)^{-\frac{2i\pi n}{\ln(3)}} \sin \left(\frac{\pi}{2} (d_n - 1) \right) \Gamma(d_n - 1) \quad (5)$$

où $u.e.$ désigne une unité d'énergie, de sorte que $C(t)$ soit adimensionnée.

On obtient donc que $C(t)$ est de la forme : $C(t) = t^{-d_c} g(\ln(t/\tau))$ (voir graphe fig. (7)), avec $d_c = d = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ la dimension fractale de K et

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_n t^{-\frac{2i\pi n}{\ln(3)}} \sin \left(\frac{\pi}{2} \left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1 \right) \right) \Gamma \left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1 \right)$$

log-périodique. L'apparition de la dimension fractale d peut être interprétée par le fait que l'énergie ϵ et le temps t sont variables conjuguées; par ailleurs, l'expression (5) montre que $C(t)$, intégrale sur K de l'ondelette $\text{sinc}((\epsilon' - \epsilon)t)$, est en quelques sortes une "loupe" au travers de laquelle on observe le spectre.

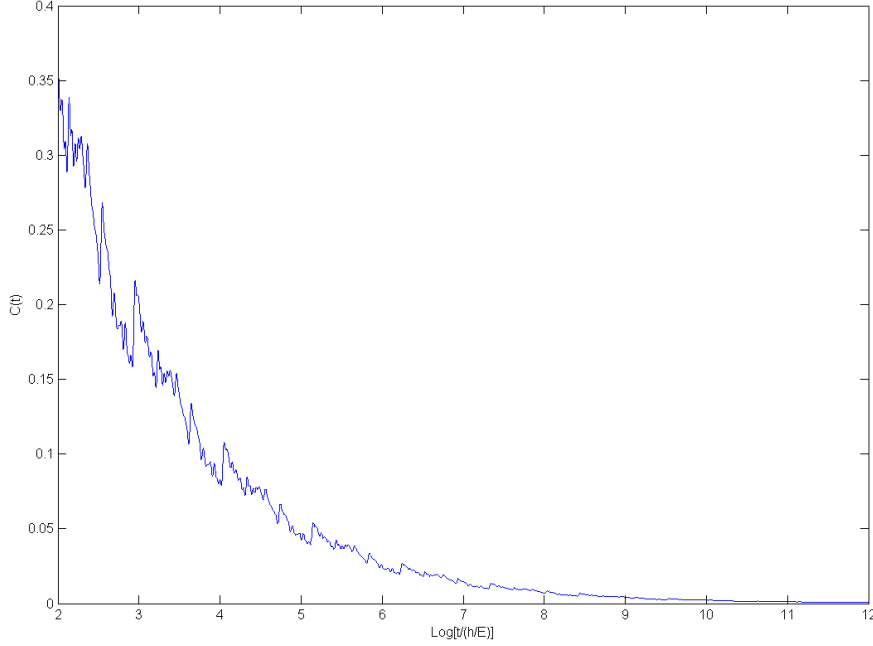


FIGURE 7 – Fonction de corrélation dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor triadique ; échelle logarithmique. Abscisse : $\ln\left(\frac{t}{\hbar/E}\right)$, E étant l'énergie maximale accessible. Ordonnées : $\frac{C(t)}{(E/u.e)^2}$.

Une étude analytique du comportement asymptotique des coefficients montre que l'on a au moins (voir annexe 7.3.1) :

$$|\epsilon_n \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1\right)\right)\Gamma\left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1\right)| = O\left(\frac{1}{n^{3/2-d}}\right)$$

Cependant, bien que n'ayant pas encore de preuve rigoureuse, il semble que l'on puisse améliorer la convergence et que

$$|\epsilon_n \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1\right)\right)\Gamma\left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1\right)| = O\left(\frac{1}{n^{5/2-d}}\right)$$

ce qu'une étude numérique semble confirmer.

Remarquons enfin que, bien que les graphes des fonctions de corrélation dans le cas de la cavité de Fibonacci (résultats numériques) et dans le cas d'un système dont le spectre est un ensemble de Cantor (résultats théoriques) présentent des similarités (loi de puissance modulée par des oscillations log-périodiques pour t suffisamment grand), l'allure des graphes n'est pas identique. Ceci provient du fait que, dans le cas de la cavité de Fibonacci, le spectre est une superposition d'ensembles de type Cantor.

Toutefois le but de la section présente n'est pas d'étudier analytiquement la dynamique du paquet d'onde pour la cavité de Fibonacci, mais de comprendre pour un spectre plus simple (ensemble de Cantor triadique) quelles quantités portent la signature de la structure fractale du spectre, et d'établir leur expression analytique. Nous saurons ainsi quelles quantités observer dans les expériences à venir.

4.4 Rapport de participation (participation ratio)

Le rapport de participation (participation ratio) [8], [14] est également une quantité intéressante pour l'étude de la dynamique et de l'étalement d'un paquet d'onde.

Par définition, le rapport de participation est :

$$P_\psi = \frac{1}{\int_{\text{espace}} |\langle x|\psi\rangle|^4 dx} \quad (6)$$

Cette fonction renseigne sur l'étalement spatial du paquet d'onde, décrit par $|\psi\rangle$. Si l'état est localisé, alors $P_\psi \simeq 0$; s'il est étendu, alors $P_\psi \simeq 1$. Cette propriété n'est pas intuitive; prenons un exemple simple pour clarifier [8] : une particule quantique dans un réseau cristallin, dans le modèle des liaisons fortes. Notons $\psi(r, t)$ l'amplitude, au point r , de la fonction d'onde de la particule quantique évoluant sur un réseau de N sites. Le rapport de participation est alors (cas discret) :

$$P_\psi = \frac{1}{N \sum_{\text{sites } r_i} |\psi(r_i, t)|^4}$$

Supposons pour simplifier que $|\psi(r, t)\rangle$ est un état propre du système, associé à l'énergie ϵ . Supposons maintenant que $\psi(r, t)$ s'étend sur m sites du réseau, $\{r_i\}_{i \in \{1, \dots, m\}}$ de façon équiprobable : $|\psi(r, t)|^2 = \frac{1}{m}$, et s'annule partout ailleurs. Alors :

$$P_\psi = \frac{1}{N \sum_1^m |\psi(r_i, t)|^4} = \frac{1}{N \sum_1^m \frac{1}{m^2}} = \frac{m}{N}$$

P_ψ décrit donc la proportion de sites sur lesquels l'amplitude de la fonction d'onde est non nulle. Si l'état décrit par $\psi(r, t)$ est localisé, alors P_ψ est faible; si l'état est étendu sur tous les sites disponibles, alors P_ψ atteint son maximum, 1.

Dans le cas de la cavité de Fibonacci, les résultats numériques montrent que le rapport de participation moyenné dans le temps présente des oscillations log-périodiques dans le temps; j'ai donc étudié cette fonction dans le cas d'un spectre de Cantor :

$$P_\psi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{dt'}{\int_{\text{espace}} |\langle x|\psi(t')\rangle|^4 dx} \quad (7)$$

L'idée est de se ramener à une intégrale sur le spectre, qui a une structure fractale et qui serait à l'origine des oscillations log-périodiques s'il y a lieu.

On utilise pour cela le formalisme des fonctions de Green. On peut en effet relier la transformée de Fourier de la fonction de Green à la densité d'état locale [13]; il s'avère, après vérification, que les calculs détaillés dans [13] sont valables dans le cas d'un spectre fractal. Pour ne donner que les grandes lignes :

$$\begin{aligned} |\psi(x, t)| &= |\langle x|\psi(t)\rangle| \\ &= |\langle x|e^{-iHt}|\psi(0)\rangle| \\ &= \left| \int_{\text{espace}} \langle x|e^{-iHt}|x'\rangle \psi(x', 0) dx' \right| \\ &= \left| \int_{\text{espace spectre}} \int e^{-i\epsilon t} \phi(x, \epsilon)^* \phi(x', \epsilon) \psi(x', 0) dx' d\mu(\epsilon) \right| \end{aligned}$$

On obtient donc finalement :

$$|\psi(x, t)| = \left| \int_{\text{espace spectre}} \int e^{-i\epsilon t} \phi(x, \epsilon)^* \phi(x', \epsilon) \psi(x', 0) dx' d\mu(\epsilon) \right| \quad (8)$$

À ce stade, deux pistes sont envisageables pour poursuivre.

4.4.1 Majoration de $\int \phi(x, \epsilon) * \phi(x', \epsilon) d\mu(\epsilon)$

Un encadrement de la fonction de Green non-diagonale, i.e. en des valeurs x, x' différentes $G(x, x', t)$, a été établi ([9], [10]) pour un grand nombre de processus de diffusion :

$$F_t(c_1, c_2, x, x') \leq G(x, x', t) \leq F_t(c_3, c_4, x, x') \quad (9)$$

avec

$$F_t(c_i, c_j, x, x') = \frac{c_i}{t^{d_s/2}} e^{-c_j \left(\frac{|x-x'|^{d_w}}{t} \right)^{\frac{1}{d_w-1}}}$$

où c_1, c_2, c_3, c_4 sont des constantes positives, d_w la dimension de marche au hasard (walk dimension) intervenant dans la relation de dispersion $\langle x^2(t) \rangle = t^{2/d_w}$, d_s la dimension spectrale telle que $d_s = \frac{2d_f}{d_w}$ et d_f la dimension de Hausdorff [5] (cf. 2.3) de l'espace dans lequel le phénomène diffusif a lieu. Il s'agit ici d'une majoration pour les problèmes de diffusion ; toutefois, il semble possible de transposer cet encadrement dans le cas de l'équation de Schrödinger sans potentiel : en effet, la différence avec l'équation de la diffusion réside dans le facteur i dans la dérivée temporelle, mais dans les deux cas les fonctions propres intervenant dans la définition de la fonction de Green (ou propagateur) sont fonctions propres du Laplacien, et ne sont pas des fonctions du temps.

Remarque : le cas des termes diagonaux est lui mieux connu ; il a même été prouvé ([10]) dans le cas de l'équation de diffusion sur certaines classes de fractales que

$$G(x, x', t) = t^{-\frac{d_f}{d_w}} F \left(\frac{2\pi \ln(t)}{d_w \ln(l)} \right)$$

Le cas des termes non-diagonaux est bien moins maîtrisé et fait l'objet de recherches actives actuellement.

4.4.2 Supposer $\overline{\phi(0, \epsilon) * \phi(x, \epsilon)} = f \left(\frac{x}{l_n} \right)$

Dans le cas d'une variété euclidienne, les fonctions propres du Laplacien vérifient la relation suivante : $\overline{\phi(\mathbf{r}, \epsilon) * \phi(\mathbf{r}', \epsilon)} = f \left(\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{l_n} \right)$. Ce résultat, bien que non démontré pour le cas d'un Laplacien défini sur une fractale, a néanmoins été utilisé comme hypothèse dans des travaux récents ([10]).

On pourrait, dans notre cas, effectuer la même hypothèse (en imposant donc de plus que le Hamiltonien soit réduit à un Laplacien).

Cette hypothèse mène à une expression analytique de la fonction de participation mettant en évidence sa log-périodicité.

Il serait donc intéressant de vérifier numériquement cette conjecture. Il faut pour cela concevoir un système tel que le spectre du Laplacien soit un ensemble de Cantor ; cette étude numérique n'est pour le moment pas terminée mais fait partie de mon programme de recherche pour l'année scolaire à venir (durant laquelle je prolonge mon stage de M1 dans le cadre d'une année ARPE).

4.5 Émission spontanée

Un autre problème intéressant sur le plan théorique et expérimental est celui de l'émission spontanée d'un système discret (atome à deux niveaux par exemple) couplé avec un spectre fractal. Expérimentalement, on peut concevoir une cavité ayant la géométrie de la cavité de Fibonacci décrite à la section 2 ; par exemple, une cavité diélectrique composée de deux types de couches A et B , de largeurs d_A et d_B et d'indices de réfraction n_A et n_B respectivement ([11]). Pour étudier la probabilité d'émission d'un photon par l'atome, la règle d'or de Fermi doit être réexaminée et l'on peut montrer [11] que, aux temps longs, il n'y a pas de décroissance type Wigner-Weisskopf, comme c'est le cas pour un spectre continu.

Considérons le cas où les modes de la cavité forment un ensemble de Cantor K par exemple. La probabilité qu'un atome à deux niveaux, initialement dans l'état excité d'énergie E_i , quitte l'état

initial sous l'effet du couplage avec la cavité et qu'il y ait au bout d'un temps t une transition vers un état d'énergie E_f , avec un écart de ΔE autour de E_f , est (en posant $\hbar = 1$) :

$$P_{fi}(t) \propto \int_{\Delta E} \left(\frac{\sin(E - E_i)t}{E - E_i} \right)^2 d\mu(E)$$

Si de plus $E_i \in K$, alors, en raison de la symétrie de K , un voisinage de E_i conserve la même propriété d'échelle. On peut donc effectuer un changement de variable $E' = E - E_i$ et appliquer la formule (1) :

$$\begin{aligned} P_{fi}(t) &\propto \int_{\Delta E + E_i} \left(\frac{\sin E't}{E'} \right)^2 d\mu(E') \\ &\propto \frac{1}{2} \int_{\Delta E + E_i} \left(\frac{\sin E't/3}{E'/3} \right)^2 d\mu(E') + \frac{1}{2} \int_{\Delta E + E_i} \left(\frac{\sin(E'+2)t/3}{(E'+2)/3} \right)^2 d\mu(E') \\ &\propto \frac{3^2}{2} P_{fi} \left(\frac{t}{3} \right) + \underbrace{\frac{3^2}{2} \int_{\Delta E + E_i} \left(\frac{\sin(E'+2)t/3}{(E'+2)/3} \right)^2 d\mu(E')}_{g(t)} \end{aligned}$$

ce qui, en suivant les mêmes techniques de calcul que dans les paragraphes précédents, conduit à :

$$P_{fi}(t) \propto \sum_n M_g(s_n) t^{2-d-2i\pi/\ln 3}$$

avec $d = \frac{\ln 2}{\ln 3}$, $s_n = d - 2 + \frac{2i\pi}{\ln 3}$ et M_g la transformée de Mellin (*cf.* annexe 7.1) de g . On n'obtient donc pas la règle d'or de Fermi pour $t \gg 1$, mais l'on observe que P_{fi} se comporte comme une loi de puissance modulée par des oscillations log-périodiques.

5 Bilan et perspectives

L'étude analytique d'un modèle théorique où le spectre du Hamiltonien est une fractale "simple" (un ensemble de Cantor triadique) a permis d'aboutir à une expression exacte de la fonction de corrélation (ou retour à l'origine), mettant explicitement en évidence les oscillations log-périodiques de cette quantité. Nous devrions également parvenir sous peu à démontrer rigoureusement la log-périodicité pour la moyenne temporelle du rapport de participation. Une simulation numérique pour tester la conjecture concernant le rapport de participation est en cours.

Ces résultats sont en accord avec les résultats et hypothèses théoriques formulées sur le lien de causalité entre la structure fractale et les oscillations log-périodiques de certaines quantités, ainsi qu'avec les résultats expérimentaux et numériques récents obtenus avec la cavité de Fibonacci.

Notons qu'il est plus aisé expérimentalement d'observer des quantités dynamiques, bien qu'il soit également possible d'observer les oscillations log-périodiques de quantités purement spectrales. En effet, observer des oscillations log-périodiques pour des quantités spectrales suppose que l'on puisse effectuer des mesures jusqu'aux hautes énergies, ce qui n'est pas toujours possible, avec une bonne résolution, en utilisant les méthodes dont nous disposons actuellement.

Cette étude analytique a donc permis de comprendre plus en profondeur le lien entre la structure fractale du spectre et ce comportement particulier, et ouvre de nouvelles perspectives.

Une autre piste de recherche est notamment la suivante : la cavité de Fibonacci permettrait d'étudier l'émission spontanée pour un système discret couplé à un spectre fractal. On peut de plus pousser l'étude plus loin et s'intéresser à l'interaction de deux atomes à deux niveaux couplés à un spectre fractal, introduisant le phénomène de superradiance.

Ces perspectives font également partie de mon programme de recherche pour l'année à venir.

6 Résumé - Abstract

La dynamique d'un système quantique ayant un spectre en énergie fractal est étudiée analytiquement. La structure auto-similaire du spectre se traduit par des oscillations log-périodiques de la densité d'états intégrée ainsi que d'autres quantités physiques décrivant le système. On étudie précisément le cas particulier où le spectre est un ensemble de Cantor triadique. L'expression analytique exacte de la fonction de corrélation est établie, mettant en évidence son comportement log-périodique. On donne également des arguments en faveur d'un comportement log-périodique du rapport de participation. Le problème de l'émission spontanée dans une cavité ayant un spectre fractal est aussi abordé. Les méthodes développées se généralisent à toute fractale auto-similaire.

We study analytically the dynamics of a quantum system having a fractal energy spectrum. As a consequence of the auto-similarity of the spectrum, the integrated density of states as well as other physical quantities describing the system have a log-periodic behaviour. We study in particular the case of a triadic Cantor set spectrum. We derive the analytical expression of the correlation function, thus showing its log-periodic behaviour. We furthermore give arguments in favour of the log-periodicity of the participation ratio. The problem of spontaneous emission in a cavity having a fractal spectrum, and some ideas about how to observe it experimentally, are also discussed. The methods developed can be generalized to any auto-similar fractal.

7 Annexes

7.1 Log-périodicité des fonctions vérifiant $f(x) = \frac{1}{b}f(ax) + g(x)$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant une égalité du type :

$$f(x) = \frac{1}{b}f(ax) + g(x) \quad (10)$$

Montrons que f est de la forme :

$$f(x) = x^{\ln(b)/\ln(a)} G\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)$$

avec G 1-périodique.

On utilise pour cela la transformée de Mellin :

Soit $]a; b[$ un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} et soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable au sens de Lebesgue, telle que pour tout $\sigma \in]a; b[$, $\int_0^\infty |f(x)|x^{\sigma-1}dx < \infty$.

La **transformée de Mellin** de f est alors définie par :

$$M_f(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx$$

Si de plus il existe $c \in]a; b[$ tel que $\tau \rightarrow M_f(c+i\tau)$ soit intégrable, alors la **transformée de Mellin inverse** de M_f redonne f :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M_f(s)x^{-s}ds$$

Appliquons la transformée de Mellin à l'égalité (10), en supposant que l'intersection des domaines définition de M_f et de M_g soit non vide :

$$\begin{aligned} M_f &= \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \\ &= \frac{1}{b} \int_0^\infty f(ax)x^{s-1}dx + \int_0^\infty g(x)x^{s-1}dx \\ &= \frac{1}{b} \int_0^\infty f(u) \left(\frac{u}{a}\right)^{s-1} \frac{du}{a} + M_g(s) \end{aligned}$$

Donc :

$$M_f(s) = \frac{M_g(s)}{1 - \frac{a^{-s}}{b}}$$

puis en appliquant le transformée de Mellin inverse :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M_f(s)x^{-s}ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{M_g(s)}{1 - \frac{a^{-s}}{b}} ds \end{aligned}$$

En supposant maintenant que M_g n'a pas de pôles, la formule des résidus donne finalement :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{(s - s_n)M_g(s)}{1 - \frac{a^{-s}}{b}} \right]_{s=s_n} \quad s_n = -\frac{\ln a}{\ln b} - \frac{2i\pi n}{\ln b}, \text{ pôles de } \frac{M_g(s)}{1 - \frac{a^{-s}}{b}} \\ &= x^{\ln(b)/\ln(a)} \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n x^{2i\pi n/\ln b}}_{G(x)} \end{aligned}$$

On obtient donc la forme voulue.

7.2 Propriété d'échelle de la mesure $d\mu$

Soit f une fonction intégrable sur $[0, 1]$, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .
On démontre ici la relation :

$$\int_K f(x) d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_K f\left(\frac{x}{3}\right) d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_K f\left(\frac{x+2}{3}\right) d\mu(x)$$

Par définition de $d\mu$:

$$\int_K f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{a_{j_n} \in P_n} \int_{a_{j_n}}^{a_{j_n} + 3^{-n}} f(x) dx}_{I_n(f(x))}$$

avec P_n l'ensemble des extrémités gauches des segments restants à l'étape n de la construction de l'ensemble de Cantor triadique. On vérifie immédiatement que la suite $(P_n)_n$ vérifie la relation de récurrence suivante : $P_n = \frac{1}{3}P_{n-1} \cup \{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}P_{n-1}\}$. Donc :

$$\begin{aligned} I_n(f(x)) &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \sum_{a_{j_n} \in P_n} \int_{a_{j_n}}^{a_{j_n} + 3^{-n}} f(x) dx \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[\sum_{a_{j_{n-1}} \in P_{n-1}} \int_{a_{j_{n-1}}/3}^{a_{j_{n-1}}/3 + 3^{-n}} f(x) dx + \sum_{a_{j_{n-1}} \in P_{n-1}} \int_{\frac{2}{3} + a_{j_{n-1}}/3}^{\frac{2}{3} + a_{j_{n-1}}/3 + 3^{-n}} f(x) dx \right] \end{aligned}$$

changement de variable : $u = 3x$, $v = 3x - 2$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[\sum_{a_{j_{n-1}} \in P_{n-1}} \int_{a_{j_{n-1}}}^{a_{j_{n-1}} + 3^{-n+1}} f\left(\frac{u}{3}\right) \frac{du}{3} + \sum_{a_{j_{n-1}} \in P_{n-1}} \int_{a_{j_{n-1}}}^{a_{j_{n-1}} + 3^{-n+1}} f\left(\frac{v+2}{3}\right) \frac{dv}{3} \right] \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{3} \left[I_{n-1}\left(f\left(\frac{u}{3}\right)\right) + I_{n-1}\left(f\left(\frac{2+v}{3}\right)\right) \right] \end{aligned}$$

Or : $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n-1}\left(f\left(\frac{u}{3}\right)\right) = \int_K f\left(\frac{u}{3}\right) d\mu(u)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n-1}\left(f\left(\frac{2+v}{3}\right)\right) = \int_K f\left(\frac{2+v}{3}\right) d\mu(u)$,
donc finalement :

$$\int_K f(x) d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_K f\left(\frac{x}{3}\right) d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_K f\left(\frac{x+2}{3}\right) d\mu(x)$$

ce qui est ce que l'on voulait démontrer.

7.3 Calcul de la fonction de corrélation dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor

Il s'agit de calculer :

$$C(t) = \iint_{K \times K} \text{sinc}((\epsilon' - \epsilon)t) d\tilde{\mu}(\epsilon) d\tilde{\mu}(\epsilon')$$

où K désigne un ensemble de Cantor triadique.

L'idée du calcul est d'abord de se ramener à une intégrale simple, puis d'utiliser les transformées de Mellin et les propriétés d'échelle de la mesure.

Effectuons le changement de variable $l = |\epsilon' - \epsilon|$ et notons $dS(l)$ la surface (pour la mesure μ) du tapis de Cantor⁷ contenu dans les deux bandes d'épaisseur infinitésimale situées en $\epsilon = \epsilon' + l$ et $\epsilon = \epsilon' - l$ (fig. 7).

⁷ ensemble de Cantor à deux dimensions, obtenu en itérant l'algorithme suivant : à partir d'un carré plein, le diviser en 9 carrés égaux, et ne garder que les quatre petits carrés situés dans les coins du grand carré.

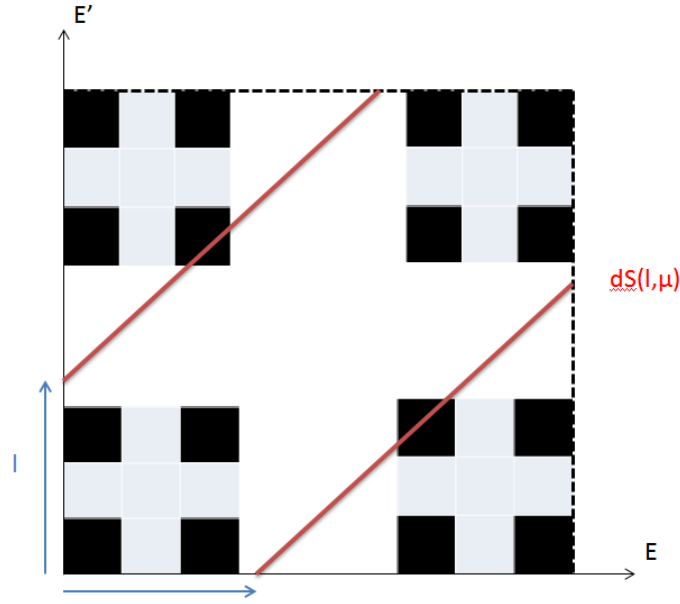


FIGURE 8 – Tapis de Cantor (représenté ici pour commodité graphique à la deuxième étape de construction); la surface infinitésimale $dS(l)$ correspond à la surface du tapis de Cantor, au sens de $d\mu$, contenue dans les deux bandes rouges.

Comme $\text{sinc}((\epsilon' - \epsilon)t)$ peut être considéré constant sur ces deux bandes élémentaires, on obtient :

$$C(t) = \int_0^1 \text{sinc}(lt) dS(l)$$

Il s'agit donc de déterminer $S(l)$.

Une première approche consiste à calculer directement la surface du tapis de Cantor comprise entre les deux droites $\epsilon = \epsilon' + l$ et $\epsilon = \epsilon' - l$, puis de prendre la différentielle de cette fonction. On procède en calculant la surface des carrés compris entre ces deux droites à l'étape n de la construction du tapis de Cantor, puis l'on fait tendre n vers l'infini. Ce calcul, assez laborieux et que nous ne détaillerons pas, permet d'aboutir à une expression qui, quoique non exploitable pour le calcul de $C(t)$, est intéressante car elle renseigne sur le comportement de $S(l)$ et permet de tracer le graphe de la fonction.

Exprimons $l \in [0, 1]$ en base trois, avec dégénérescence : $l = \frac{1}{3^{N_0}} \left(1 + \sum_{i \in \{1, 2, \dots\}} \frac{1}{3^{N_i}} \right)$, avec possiblement $N_i = N_j$ pour $i \neq j$. Alors :

$$S(l) = \frac{1}{2^{N_0}} \left[1 + \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^{2N_i}} \times \left(\frac{1}{2^{N_k}} \text{ si } k \text{ pair, } \frac{1}{2^{N_k}} \text{ si } k \text{ impair} \right) \right]$$

Le graphe de cette fonction est donnée fig. On vérifie facilement que : $S(3^n l) = 2^n S(l)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De plus, une étude numérique suggère que $S(l) = l^{\ln(2)/\ln(3)} g\left(\frac{\ln(x)}{\ln(3)}\right)$ avec g périodique.

Une autre méthode pour obtenir $S(l)$ utilise les transformées de Mellin (cf. annexe 7.1).

Posons : $\zeta(\alpha) = \int_0^1 l^{-\alpha} dS(l, \mu)$. Il s'agit de la transformée de Mellin de $dS(l)$ au point $1 - \alpha$: $M_{dS}(s) = \int_0^1 l^{s-1} dS(l, \mu)$. Il est usuel, dans les problèmes 1D de calcul de produit de convolution avec des ondelettes, d'introduire la fonction ζ associée à la mesure ν du problème : $\zeta(s) = \int \frac{d\nu(x)}{x^s}$;

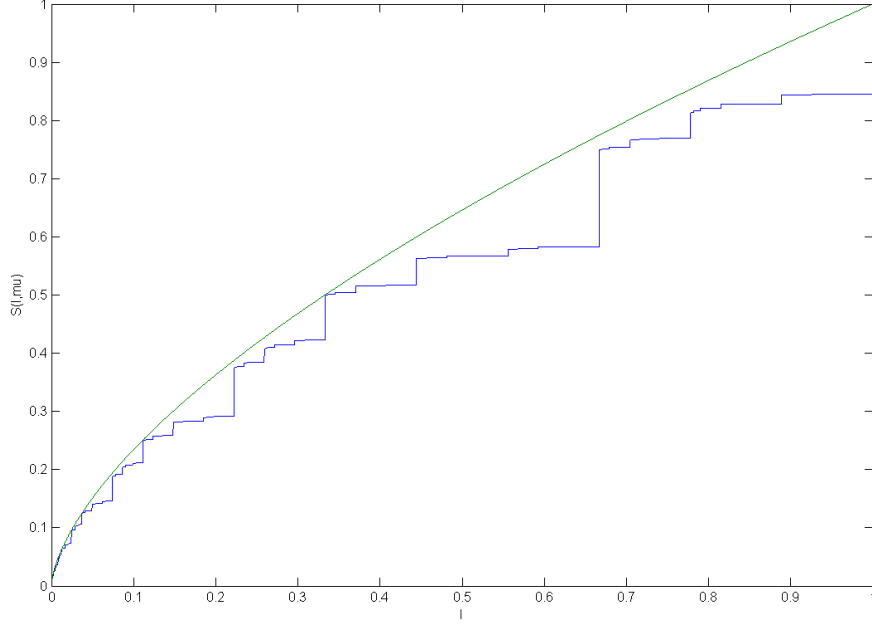


FIGURE 9 – Courbe bleue : graphe de la fonction $S(l)$, surface du tapis de Cantor situé entre les deux bandes rouges de la figure 6.2. Courbe verte : graphe de $l \rightarrow l^{\ln(2)/\ln(3)}$. Les points de rencontre des deux courbes sont espacés de façon log-périodique.

nous transposons ici cette méthode au cas 2D.

$$\begin{aligned}
\zeta(\alpha) &= \int_0^1 l^{-\alpha} dS(l, \mu) \\
&= \iint_{K \times K} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} \\
&= \frac{1}{2} \iint_{K \times K} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{3^{-\alpha}|x-y|^\alpha} + \iint_{K \times K} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{3^{-\alpha}|x-y+2|^\alpha} \\
&= \frac{3^\alpha}{2} \zeta(\alpha) + \epsilon(\alpha)
\end{aligned}$$

d'où

$$\zeta(\alpha) = \frac{\epsilon(\alpha)}{1 - \frac{3^\alpha}{2}}$$

La transformée de Mellin inverse permet alors d'obtenir $dS(l)$:

$$\begin{aligned}
dS(l, \mu) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} M_{dS}(\alpha) l^{-\alpha} d\alpha \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \zeta(1-\alpha) l^{-\alpha} d\alpha \\
&= \sum_n \left[\frac{\alpha - (1 - \alpha_n)}{1 - \frac{3^{1-\alpha}}{2}} l^{-\alpha} \epsilon(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_n}
\end{aligned}$$

avec $1 - \alpha_n = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$, $d = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

Finalement : $dS(l, \mu) = \frac{l^{d-1}}{\ln(3)} \sum_n l^{\frac{2i\pi n}{\ln(3)}} \epsilon \left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} \right) = \frac{l^{d-1}}{\ln(3)} \sum_n l^{\frac{2i\pi n}{\ln(3)}} \epsilon_n$. D'où, en intégrant et en

faisant l'approximation :

$$\int_0^\infty u^{d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1} \text{sinc}(u) du \approx \int_0^\infty u^{d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1} \text{sinc}(u) du$$

et avec

$$\int_0^\infty u^{d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1} \text{sinc}(u) du = \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1\right)\right) \Gamma\left(d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1\right)$$

avec Γ la fonction gamma de Euler, on obtient :

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_0^1 \text{sinc}(lt) dS(l, \mu) \\ &= \frac{1}{\ln(3)} \sum_n \epsilon_n t^{-\frac{2i\pi n}{\ln(3)}} \sin\left(\frac{\pi}{2}(d_n-1)\right) \Gamma(d_n-1) \end{aligned}$$

7.3.1 Comportement asymptotique des coefficients

On démontre ici la relation :

$$|\epsilon_n \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1\right)\right) \Gamma\left(d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1\right)| = O\left(\frac{1}{n^{3/2-d}}\right)$$

avec $d = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ et on donne des arguments pour justifier (bien que cela ne soit pas rigoureusement démontré) que

$$|\epsilon_n \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1\right)\right) \Gamma\left(d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1\right)| \stackrel{?}{=} O\left(\frac{1}{n^{5/2-d}}\right)$$

Commençons par $|\sin(\frac{\pi}{2}(d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1)) \Gamma(d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1)|$:

lorsque $n \rightarrow \infty$, on a le comportement asymptotique suivant pour $|\Gamma(d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1)|$ [12] :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Gamma(d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1)| = \sqrt{2\pi} e^{-(d-1)} e^{-\frac{2\pi^2 n}{2\ln(3)}} \left(\frac{2\pi n}{\ln(3)}\right)^{d-\frac{3}{2}}$$

Comme de plus : $|\sin(\frac{\pi}{2}(d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1))| \sim e^{\frac{2\pi^2 n}{2\ln(3)}} e^{1-d}/2$ quand n tend vers l'infini, on obtient finalement :

$$|\sin(\frac{\pi}{2}(d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1)) \Gamma(d+\frac{2i\pi n}{\ln(3)}-1)| = O\left(\frac{1}{n^{3/2-d}}\right)$$

Intéressons-nous maintenant à ϵ_n .

Par définition :

$$\epsilon_n = \iint_{K \times K} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|2-x+y|^{d_n}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2k} \sum_{(a_{j_k}, a_{j'_k}) \in P_k \times P_k} \int_{a_{j_k}}^{a_{j_k}+3^{-k}} \int_{a_{j'_k}}^{a_{j'_k}+3^{-k}} \frac{dx dy}{|2-x+y|^{d_n}}$$

avec $d_n = \frac{\ln 2}{\ln 3} + \frac{2i\pi n}{\ln 3}$ et $P_k = \{a_{j_k}\}$ l'ensemble des extrémités gauches des segments présents à l'étape k de la construction de l'ensemble de Cantor triadique. Comme l'ensemble de Cantor est inclus dans le segment $[0, 1]$, et que l'on a pour tout $x, y \in [0, 1]$ l'inégalité : $2) x - y$, on peut supprimer les valeurs absolues dans les intégrales.

On voit immédiatement que $|\epsilon_n|$ est bornée : pour tout $x, y \in [0, 1]$, on a $1 < 2 - x + y < 3$ donc $|\frac{1}{|2-x+y|^{d_n}}| = \frac{1}{|2-x+y|^d} < 1$. Donc :

$$|\epsilon_n| < \iint_{K \times K} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|(2-x+y)^{d_n}|} < \iint_{K \times K} d\mu(x)d\mu(y) = 1$$

Il semble cependant que l'on puisse améliorer ce comportement asymptotique en $|\epsilon_n| = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

L'idée est d'intégrer par partie, en intégrant le terme oscillant (inspiré du théorème de Riemann-Lebesgue⁸)

Effectuons le changement de variable $t = \ln(2 - x + y)$, $y = e^t - 2 + x$; alors :

$$\int_{a_{j_k}}^{a_{j_k}+3^{-k}} \int_{a_{j'_k}}^{a_{j'_k}+3^{-k}} \frac{dxdy}{|2-x+y|^{d_n}} = \int_{a_{j_k}}^{a_{j_k}+3^{-k}} dx \int_{\ln(2-x+a_{j'_k})}^{\ln(2-x+a_{j'_k}+3^{-k})} e^{-td_n} e^t dt$$

Intégrons par parties :

$$\begin{aligned} & \int_{\ln(2-x+a_{j'_k})}^{\ln(2-x+a_{j'_k}+3^{-k})} e^{-t2i\pi n/\ln(3)} e^{t-\ln(2)/\ln(3)} dt = \\ & \left[\frac{e^{-t2i\pi n/\ln(3)}}{-2i\pi n/\ln(3)} e^{t(1-\ln(2)/\ln(3))} \right]_{\ln(2-x+a_{j'_k})}^{\ln(2-x+a_{j'_k}+3^{-k})} + \frac{1-\ln(2)/\ln(3)}{2i\pi n/\ln(3)} \int_{\ln(2-x+a_{j'_k})}^{\ln(2-x+a_{j'_k}+3^{-k})} e^{-td_n} e^t dt \\ & = \frac{1}{-2i\pi n/\ln(3)} \left[(2-x+a_{j'_k}+3^{-k})^{1-d_n} - (2-x+a_{j'_k})^{1-d_n} \right] + \frac{1-d}{2i\pi n/\ln(3)} \int_{\ln(2-x+a_{j'_k})}^{\ln(2-x+a_{j'_k}+3^{-k})} e^{-td_n} e^t dt \end{aligned}$$

Comme : $|e^{(1-d_n)t} - e^{(d-1)t}| < 3^{d-1}$ pour tout t ($t = \ln(2-x+y)$ avec $x, y \in [0, 1]$) donc $t \in [0, \ln 3]$, on a :

$$\left\| \int_{\ln(2-x+a_{j'_k})}^{\ln(2-x+a_{j'_k}+3^{-k})} e^{(1-d_n)t} dt \right\| < \int_{\ln(2-x+a_{j'_k})}^{\ln(2-x+a_{j'_k}+3^{-k})} 3^{1-d} dt$$

puis :

$$\int_{\ln(2-x+a_{j'_k})}^{\ln(2-x+a_{j'_k}+3^{-k})} 3^{1-d} dt \approx 3^{1-d} \frac{3^{-k}}{2-x+a_{j'_k}} < 3^{1-d} 3^{-k}$$

Avec l'approximation supplémentaire : $\int_{a_{j_k}}^{a_{j_k}+3^{-k}} (2-x+a_{j'_k})^{1-d_n} dx \approx 3^{-k} (2-a_{j_k}+a_{j'_k})^{1-d_n}$, il vient :

$$\begin{aligned} & \int_{a_{j_k}}^{a_{j_k}+3^{-k}} \int_{a_{j'_k}}^{a_{j'_k}+3^{-k}} \frac{dxdy}{|2-x+y|^{d_n}} \\ & \approx 3^{-k} \frac{1}{-2i\pi n/\ln(3)} \left[(2-a_{j_k}+a_{j'_k}+3^{-k})^{1-d_n} - (2-a_{j_k}+a_{j'_k})^{1-d_n} \right] + \frac{(1-d)\ln 3}{2i\pi n} 3^{1-d} 3^{-2k} \end{aligned}$$

Puis, tenant compte du fait que $\text{Card}P_k = 2^k$, et donc que $\sum_{\frac{1}{2^k}P_k \times P_k} O\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$, il vient :

$$\begin{aligned} \epsilon_n & \approx \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2k} \sum_{P_k \times P_k} 3^{-k} \frac{1}{-2i\pi n/\ln(3)} \left[(2-a_{j_k}+a_{j'_k}+3^{-k})^{1-d_n} - (2-a_{j_k}+a_{j'_k})^{1-d_n} \right] \\ & + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2k} \sum_{P_k \times P_k} 3^{-k} \frac{(1-d)\ln 3}{2i\pi n} 3^{1-d} 3^{-2k} \\ & \approx \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2k} \sum_{P_k \times P_k} 3^{-k} \frac{1}{-2i\pi n/\ln(3)} \left[(2-a_{j_k}+a_{j'_k}+3^{-k})^{1-d_n} - (2-a_{j_k}+a_{j'_k})^{1-d_n} \right] + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

8. Théorème de Riemann-Lebesgue : soit f une fonction intégrable sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{C} ou \mathbb{R} ; alors :

$$\int_I f(x) e^{-isx} dx \rightarrow 0 \text{ quand } s \text{ tend vers } \pm\infty$$

Il reste à prouver que, pour tout n , $(\frac{3}{2})^{2k} \sum_{P_k \times P_k} 3^{-k} [(2 - a_{j_k} + a_{j'_k} + 3^{-k})^{1-d_n} - (2 - a_{j_k} + a_{j'_k})^{1-d_n}]$ converge lorsque $k \rightarrow \infty$, et que la limite est bornée par une quantité indépendante de n . Cela semble raisonnable, mais je n'ai pas encore de preuve rigoureuse.

Une autre piste à explorer est la suivante : en utilisant l'identité

$$\frac{1}{\lambda^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-\lambda t} dt$$

on peut réécrire ϵ_n sous la forme :

$$\epsilon_n = \frac{1}{\Gamma(d_n)} \int_0^\infty \left(\iint_{K \times K} e^{(x-y)t} d\mu(x) d\mu(y) \right) e^{-2t} t^{d_n-1} dt$$

On pourrait alors appliquer une méthode type méthode de Laplace.

8 Bibliographie

- [1] Tanese, E. Gurevich, A. Lemaitre, E. Galopin, I. Sagnes, A. Amo, J. Bloch, E. Akkermans, arxiv :1311.3453, 2013
- [2] For a recent review, E. Akkermans, Contemporary Mathematics 601, 1-22 (2013), arXiv :1210.6763.
- [3] C. Janot, "Quasicristals, a primer", Carendon press Oxford, 1994
- [4] A. Suto, J. Star. Phys. 56 :525 (1989).; For a review, D. Damanik and A. Gorodetski, Commun. Math. Phys. 305, 221 (2011)
- [5] J. Feder, "Fractals", Plenum Press - New York and London, 1988
- [6] E. Akkermans, O. Benichou, G. Dunne, A. Teplyaev and R. Voituriez, Phys. Rev. E 86, 061125 (2012).
- [7] J. Bellissard, A. Bovier and J.M. Ghez, Reviews in Math. Physics, Vol. 4, No. 1, 1-37 (1992)
- [8] F. Wegner, Z. Physik B 36, 209-214 (1980)
- [9] M. T. Barlow and E. A. Perkins, Prob. Theor. Rel. Fields 79, 543 (1988); M. T. Barlow, Lect. Notes Math. 1690, 1 (1998).
- [10] E. Akkermans, O. Benichou, G. V. Dunne, A. Teplyaev, and R. Voituriez, "Spatial log-periodic oscillations of first-passage observables in fractals", PHYSICAL REVIEW E 86, 061125 (2012)
- [11] E. Akkermans, E. Gurevich "Spontaneous emission from a fractal vacuum", EPL, 103 (2013) 30009
- [12] A. A. Kilbas, M. Saigo, "A remark on asymptotics of the gamma function at infinity" in *Study on Applications for Fractional Calculus Operators in Univalent Function Theory*, RIMS Kokyuroku, 1363 . pp. 33-36
- [13] E. Akkermans, G. Montambaux, *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*, (Cambridge University Press, 2007)
- [14] T. Nakayama, K. Yakubo, "Fractal concepts in condensed matter physics", Springer Science & Business Media, 11 juil. 2003
- [15] Hopfield, J. J., 1958, Phys. Rev. 112, 1555.
- [16] I. Carusotto, C. Ciuti, Reviews of modern physics, vol. 85, January-March 2013
- [17] for a review, E. Macia Barber, "Aperiodic Structures in Condensed Matter - Fundamentals and Applications", CRC Press, 2009
- [18] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, "Atom-photons interactions - Basic processes and applications", WILEY-VCI-IVerlag GmhH & Co, 2004
- [19] F. V. Atkinson, "Discrete and continuous boundary problems" in *Mathematics in science and engineering*, vol. 8 (New York/London Academic Press, 1964)
- [20] L. G. Rogers, *Estimates for the resolvent kernel of the Laplacian on P.C.F. self similar fractals and blowups*; M. Ionescu, E. P. J. Pearse, L. G. Rogers, H.-J. Ruan, R. S. Strichartz, "The resolvent kernel for PCF self similar fractals" Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), 4451-4479
- [21] Halmos, Paul R., "Measure Theory", Graduate Texts in Mathematics 18, New York, Heidelberg, Berlin : Springer-(1974)