

# Dynamique d'un paquet d'onde dans le cas d'un spectre fractal

Ariane SORET  
encadrée par Eric AKKERMAN et Evgeni GUREVICH

18 août 2014

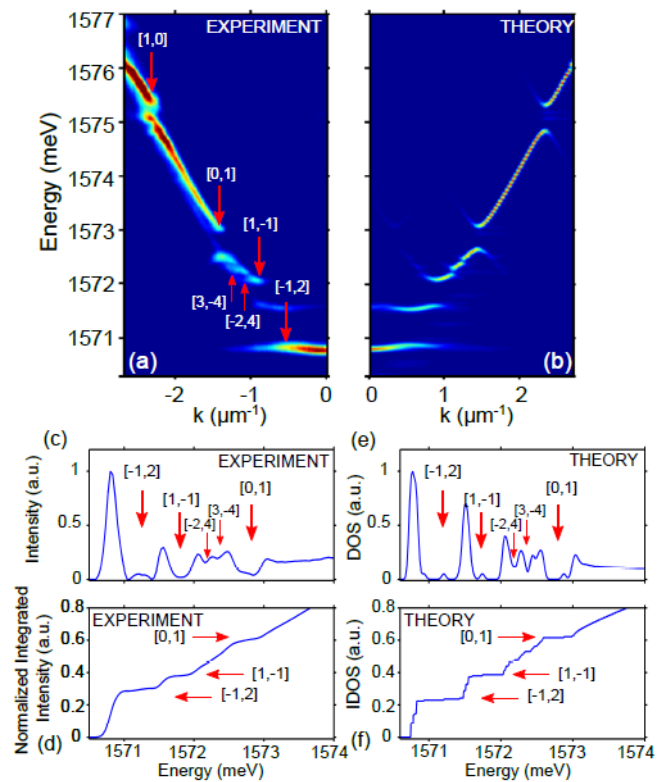


FIGURE 1 –



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Préliminaires mathématiques</b>	<b>7</b>
2.1	Définition des fractales . . . . .	7
2.2	Ensemble de Cantor . . . . .	7
2.3	Dimension fractale . . . . .	8
2.4	Propriétés d'échelle et oscillations log-périodiques . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Exemple expérimental : potentiel de Fibonacci</b>	<b>11</b>
3.1	Présentation de l'expérience . . . . .	11
3.2	Etude théorique et résultats expérimentaux et numériques . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Etude théorique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor</b>	<b>15</b>
4.1	Définition d'une mesure appropriée . . . . .	15
4.2	Fonction de densité d'états intégrée . . . . .	16
4.3	Fonction de corrélation . . . . .	16
4.3.1	Expression analytique de $C(t)$ dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor . . . . .	16
4.4	Rapport de participation (participation ratio) . . . . .	18
4.4.1	Majoration de $\int \phi(x, \epsilon)^* \phi(x', \epsilon) d\mu(\epsilon)$ . . . . .	19
4.4.2	Supposer $\overline{\phi(0, \epsilon)^* \phi(x, \epsilon)} = f\left(\frac{x}{l_\epsilon}\right)$ . . . . .	19
4.5	Emission spontanée . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Bilan et perspectives</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Annexes</b>	<b>23</b>
6.1	Log-périodicité de fonctions vérifiant $f(x) = \frac{1}{b}f(ax) + g(x)$ . . . . .	23
6.2	Calcul de la fonction de corrélation dans la cas où le spectre est un ensemble de Cantor . . . . .	24
6.2.1	Expression analytique . . . . .	24
6.2.2	Comportement asymptotique des coefficients . . . . .	26
<b>7</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>27</b>



# Chapitre 1

## Introduction

La dynamique et les propriétés de transport de systèmes quantiques dépendent de leur profil spectral. Or, un potentiel variant spatialement induit une modification de la densité d'états des modes propres du système. Selon la géométrie du potentiel, on peut obtenir un ensemble très riche de distributions spectrales, regroupées en trois catégories : spectre continu, discret ou continu singulier. Les cas des spectres continus et discrets sont plutôt bien connus (le spectre d'un potentiel périodique, par exemple, est bien décrit par le théorème de Bloch). Le cas singulier continu, dont les fractales font partie, est un profil qui apparaît pour une large gamme de potentiels et constitue le cas générique, mais est beaucoup moins bien compris, quoique faisant l'objet de nombreux travaux, tant dans le domaine des mathématiques que de la physique [1],[2] (l'intérêt pour ce type de spectre est apparu notamment avec la découverte des quasi cristaux, structures quasi-périodiques associées à un spectre singulier continu [3]).

L'objet de mon stage est d'étudier la dynamique d'un système quantique dans le cas d'un spectre singulier continu fractal.

Un ensemble particulièrement intéressant et largement étudié de potentiels quasi-périodiques dont le spectre est fractal sont les potentiels construits à partir de la suite de Fibonacci [4]. Dans ce cas, il a été démontré qu'il est de type ensemble de Cantor [1], c'est-à-dire fractal.

Le point de départ de mon stage furent les expériences réalisées dans le Laboratoire de Photonique et de Nanostructures (France) en partenariat avec le groupe de recherche d'accueil au Technion et l'étude numérique effectuée dans le groupe, sur la dynamique d'un paquet d'onde construit à partir des modes des polaritons confinés dans une cavité type Fibonacci ; le spectre des polaritons étant fractal, il possède une propriété d'échelle, ce qui devrait avoir un impact sur les propriétés physiques du système. Plus précisément, les manip visaient à démontrer l'existence d'oscillations log-périodiques pour certaines quantités spectrales et dynamiques, signature de la structure fractale du spectre ; pour la première fois, ce comportement particulier a été mis en évidence [4].

Mon objectif est de travailler sur la dynamique d'un système quantique dans le cas particulier où le spectre est un ensemble de Cantor (un cas particulier de fractale). Il s'agit de comprendre comment la structure fractale du spectre se répercute sur la dynamique du système, de déterminer quelles quantités physiques mesurables portent la trace de cette structure fractale et d'établir l'expression analytique des quantités pertinentes. Cette étude vient conforter les observations faites grâce aux expériences du LPN, et devrait donner de nouvelles pistes pour les expériences.

Après le rappel de quelques propriétés générales utiles sur les fractales et la présentation de l'expérience du LPN, je me concentrerai sur l'étude analytique et numérique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor. Je tâcherai finalement de présenter les nouvelles perspectives de recherche au terme de ce travail.



## Chapitre 2

# Préliminaires mathématiques

### 2.1 Définition des fractales

Il est assez difficile de définir précisément de qu'est une fractale. Le terme "fractal" (du latin *brisé*) a été introduit par Mandelbrot pour définir les objets tellement irréguliers qu'ils sortent du cadre de la géométrie classique ; selon sa formulation <sup>1</sup> :

*"une fractale est une forme composée de parties similaires au tout d'une façon ou d'une autre"*

Dans ce rapport, nous nous intéresserons aux fractales vérifiant une propriété d'échelle : si l'on "zoom" sur une zone particulière, on retrouve, dans les mêmes proportions, la figure de départ. On considérera de plus que les fractales sont plongées dans un espace euclidien.

Illustrons cette définition par un exemple : le "triangle de Sierpinski". Partant d'un triangle équilatéral plein, on joint deux à deux les milieux des côtés et l'on supprime le petit triangle central ainsi formé. En itérant ce processus dans chacun des quatre triangles pleins restants, on obtient à la limite un objet vérifiant une propriété d'échelle : si l'on zoom sur l'un des triangles pleins, on observe la même structure (fig. 2.1).

### 2.2 Ensemble de Cantor

Un autre exemple classique de fractale est l'ensemble de Cantor (fig 2.2), sur lequel j'ai principalement travaillé (le lien avec la physique apparaîtra plus clairement plus loin).

Un ensemble de Cantor triadique se construit itérativement (fig 2.2) : partant d'un segment  $[0, 1]$ , on le divise en trois segments égaux et l'on retire la partie centrale. On itère cette opération sur les deux segments restants, et ainsi de suite. Après une infinité d'itérations, il reste un ensemble (de mesure nulle au sens de Lebesgue) composé de points isolés.

---

1. Mandelbrot, correspondance, 1987

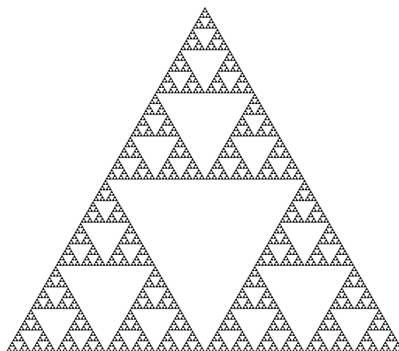


FIGURE 2.1 – Triangle de Sierpinski. Source : <http://commons.wikimedia.org>



FIGURE 2.2 – Construction d'un ensemble de Cantor triadique. Source : accromath.uqam.ca

Tout comme le triangle de Sierpinski, un ensemble de Cantor triadique possède une propriété ou invariance d'échelle : en zoomant d'un facteur 3, on retrouve la même structure. Si de plus on imagine un système dont la masse ou les modes sont répartis uniformément sur un ensemble de Cantor, alors, en zoomant d'un facteur 3, la densité de masse ou de modes se trouve renormalisée d'un facteur  $\frac{1}{2}$ . Cette propriété importante sera utilisée par la suite pour définir une mesure appropriée de l'ensemble de Cantor.

## 2.3 Dimension fractale

Afin de caractériser une fractale, l'une des premières choses que l'on souhaite déterminer est sa dimension. Une méthode pour calculer les dimensions fractales [5] est résumée en annexe.

Intuitivement, la dimension d'un espace ou d'un objet géométrique peut s'interpréter comme le nombre réel (positif)  $d$  tel qu'un volume élémentaire  $v$  soit de la forme :  $v = l^d$ , où  $l$  est une longueur au sens euclidien.

Pour des structures fractales, la dimension n'est en général pas entière ; ceci a des conséquences profonde sur les propriétés physiques de systèmes présentant des structures fractales [6].

La dimension d'un ensemble de Cantor triadique, qui nous intéresse particulièrement, vaut  $d = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ .

## 2.4 Propriétés d'échelle et oscillations log-périodiques

Ce paragraphe purement mathématique présente une méthode de calcul qui sera abondamment utilisée par la suite, pour démontrer la log-périodicité de diverses fonctions.

Les fractales auto-similaires, que l'on étudie ici, possèdent une invariance d'échelle, c'est-à-dire qu'en zoomant avec le bon facteur sur une partie de l'ensemble, on retrouve la même forme que le tout, dans les mêmes proportions.

Mathématiquement, une fonction  $f$  ayant une telle propriété d'échelle vérifie une relation du type :

$$f(x) = \frac{1}{b}f(ax)$$

pour un certain couple de réels  $(a, b)$ ,  $b \neq 0$ . On vérifie facilement que cela implique que  $f$  soit de la forme :

$$f(x) = x^{\ln(b)/\ln(a)} g\left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)$$

avec  $g$  une fonction périodique de période 1 :  $g(x+1) = g(x)$ . En effet :

- si  $b = 1$ , on peut définir une fonction  $h$  telle que :  $h(x) = f(\exp x \ln a)$  (changement de variable), et l'on vérifie que :  $h(x+1) = f(e^{(x+1)\ln a}) = f(e^x a) = f(\exp x) = h(x)$  ;  $f$  est donc bien de la forme :  $f(x) = h\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)$  avec  $h$  1-périodique.

- si  $b \neq 1$ , on se ramène au cas précédent en remarquant que  $k(x) = f(x)x^{-\ln(b)/\ln(a)}$  vérifie  $k(x) = k(ax)$ .

Il est également important de noter que les fonctions  $f$  vérifiant une égalité du type :

$$f(x) = \frac{1}{b}f(ax) + g(x)$$



avec  $g$  ayant certaines propriétés (définies en annexe) est également de la forme :

$$f(x) = x^{\ln(b)/\ln(a)} G\left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)$$

avec  $G$  une fonction 1-périodique.

La démonstration est un peu plus technique et fait appel aux transformées de Mellin ; elle est donnée en annexe.



## Chapitre 3

# Exemple expérimental : potentiel de Fibonacci

Le point de départ de mon stage fut les expériences réalisées par l'équipe de J. Bloch, au LPN (Laboratoire de Photonique et de Nanostructures, France) ; le détail du dispositif expérimental est fourni en annexe.

Le but de l'expérience est de réaliser et d'étudier un système physique présentant une structure fractale. A partir d'une cavité unidimensionnelle quasi-périodique, décrite par une suite de Fibonacci, on étudie les modes d'un gaz de polaritons qui y sont confinés. Bien que de nombreuses expériences d'optique dans des cavités de Fibonacci aient déjà été réalisées dans le passé, la signature du spectre fractal au travers les oscillations log-périodiques de la densité d'états intégrée notamment n'avait jusque là pas été observée.

### 3.1 Présentation de l'expérience

Un gaz de polaritons (quasiparticules issues du couplage fort entre un mode optique d'une cavité optique et une paire électron-trou, appelée exciton) est confiné dans une cavité longitudinale dont la largeur varie de façon quasipériodique, suivant la suite de Fibonacci (fig. 3). On peut considérer que la cavité est composée d'une série de blocs élémentaires ou "lettres" d'égales longueurs, mais de deux profondeurs différentes, A et B. Les lettres sont ordonnées suivant la suite de Fibonacci, grâce à la relation de récurrence suivante :  $S_{j>2} = [S_{j-1}S_{j-2}]$  et  $S_1 = B, S_2 = A$ . A la limite, la séquence  $S_\infty$  est quasipériodique. Le mouvement longitudinal des polaritons est ainsi modulé par un potentiel  $V$  quasipériodique.

Expérimentalement, on fabrique une cavité finie selon une séquence  $S_n$ , mais les résultats expérimentaux sont en accord avec les simulations numériques issues de modèles théoriques pour un spectre fractal.

### 3.2 Etude théorique et résultats expérimentaux et numériques

Le spectre en énergie associé au potentiel quasi-périodique  $V$  est singulier-continu et présente une structure de type Cantor [1].

Par ailleurs, le théorème de gap-labelling [7] permet de caractériser la densité des gaps et de prédire la valeur de l'intégrale de la densité d'états aux énergies de gap.

Ecrivons le potentiel quasipériodique  $V(x)$  sous la forme :

$$V(x) = \sum_n \chi(n\sigma^{-1})u_b(x - an)$$

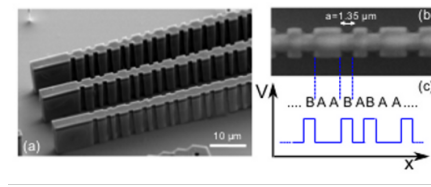


FIGURE 3.1 –

où  $u_b$  décrit la forme de la lettre  $B$  et  $\chi$ , définie sur  $[0, 1]$  et prolongé par périodicité, décrit l'ordre quasipériodique :  $\chi(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 2-\sigma \\ 0 & 2-\sigma < x < 1 \end{cases}$  où  $\sigma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est le nombre d'or.

La transformée de Fourier de  $V$  donne les pics de Bragg :

$$V(k) = \tilde{u}_b(k) \sum_{p,q} \chi_q \delta(ka - 2\pi(p + q\sigma^{-1}))$$

Comme  $\sigma$  est irrationnel, chaque pic peut être associé de façon biunivoque à un couple d'entiers  $[p, q]$  de telle sorte que le nombre d'onde correspondant soit  $k = Q_{p,q} = \frac{2\pi}{a}(p + q\sigma^{-1})$ . Chaque pic de Bragg correspond à un gap dans le spectre (cf. annexe). De plus, en remarquant que  $Q_{p,q} \frac{a}{2\pi} = p + q\sigma^{-1} \bmod 1$  est la proportion de modes propres non perturbés dont l'énergie est inférieure à  $E_{p,q}$ , on obtient la relation suivante pour l'IDOS dans le gap  $[p, q]$  :

$$N(\epsilon) = E_{Q_{p,q}/2} = p + q\sigma^{-1} \bmod 1$$

Ces résultats, établis pour une cavité infinie, se vérifient expérimentalement bien pour une cavité finie (voir graphes de la section suivante).

Les résultats expérimentaux et numériques suivants mettent en évidence d'existence d'oscillations log-périodiques pour la fonction de corrélation, ou retour à l'origine, ainsi que pour le rapport de participation.

Les courbes présentées ont été obtenues pour une cavité de 144 lettres.

La figure (??) présente le graphe de la fonction de corrélation, définie par :

$$C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t | \langle \psi(0) | \psi(t') \rangle |^2 dt'$$

La figure (??) montre le profil de l'intensité d'états intégrée. On note que la prédiction théorique de la valeur de  $N$  aux différents gaps s'accorde bien avec l'expérience.

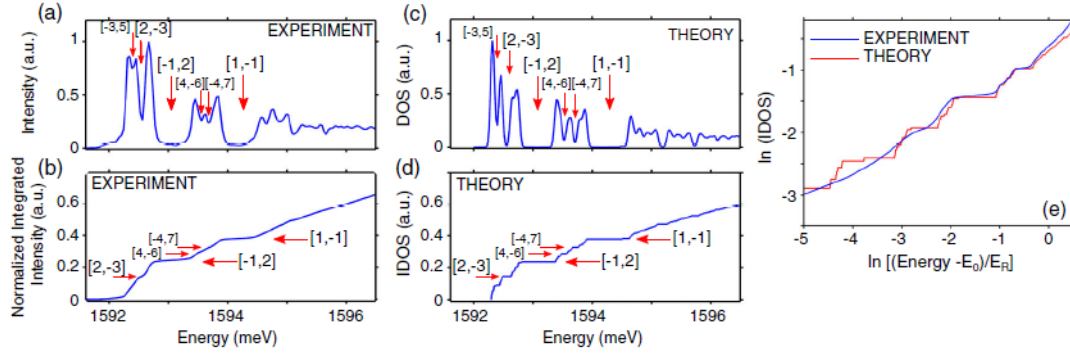


FIGURE 3.2 – (a) Mesure de l'intensité totale émise (intégrale angulaire)  $I(\epsilon')$  de la cavité quasi-périodique ; (b) Intégrale spectrale de l'intensité  $\int_{E_0}^{\epsilon} I(\epsilon') d\epsilon'$  ( $E_0$  énergie minimale) ; Calcul de la densité d'états normalisée (DOS) (c) et de l'intégrale de la densité d'états (IDOS) (d) ; (e) Oscillations log-périodiques de l'IDOS au voisinage de  $E_0$  : échelle log-log, courbe numérique (rouge) et expérimentale (bleue) (normalisée à  $E_R = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8a^2 m_p}$ ,  $m_p$  la masse du polariton. Source : [ ]

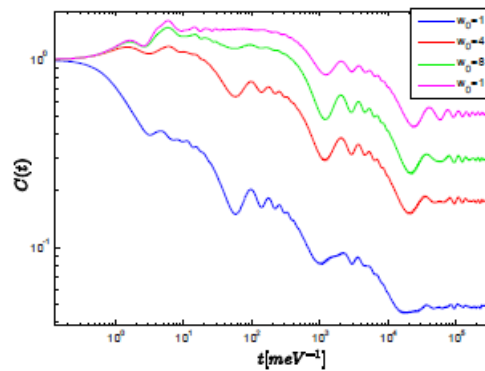


FIGURE 3.3 – Fonction de corrélation du paquet d'onde



## Chapitre 4

# Etude théorique dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor

La principale partie de mon travail a été d'étudier analytiquement le cas d'un système dont le spectre en énergie est un ensemble de Cantor. Les résultats théoriques et expérimentaux déjà obtenus indiquent notamment que la présence d'un spectre fractal se manifeste au travers le comportement log-périodique de certaines quantités, telles la densité d'états intégrée. Il s'agit de comprendre l'origine de ce comportement particulier, de déterminer quelles sont les quantités physiques qui en portent la trace et de parvenir à une expression analytique de ces quantités.

Cette étude permettra ensuite de faire des simulations numériques et de concevoir de nouvelles expériences pour étayer la théorie.

Dans la suite, on supposera donc que l'on étudie un système caractérisé par une fonction d'onde  $|\psi(t)\rangle$  et régi par un Hamiltonien dont le spectre est un ensemble de Cantor.

### 4.1 Définition d'une mesure appropriée

La première difficulté est la définition d'une mesure adéquate pour caractériser le spectre. Un ensemble de Cantor est un ensemble de points isolés ; sa mesure au sens de Lebesgue est donc nulle. Toutefois, si l'on envisage un système dont les modes sont répartis sur un ensemble de Cantor, la somme des énergies (avec dégénérescence) est non nulle, donc l'intégrale de la densité d'état sur le spectre doit être non nulle. On comprend cependant intuitivement que pour que l'intégrale de la densité d'état  $\rho(\epsilon)$  sur un ensemble de mesure nulle (un ensemble de points ici) soit non nulle, cette densité d'état doit être infinie en les points du spectre. De fait,  $\rho$  n'est pas définie pour un ensemble de Cantor.

On suppose ici de plus que l'intégrale de la densité d'état sur le spectre est finie.

On suppose Afin de modéliser cette situation, j'ai défini une mesure  $d\mu$  appropriée ; abusivement,  $d\mu$  est une mesure qui vérifie la relation :  $d\mu(\epsilon) = \rho(\epsilon)d\epsilon$ , c'est-à-dire que la densité d'état est contenue dans la définition de la mesure.

Supposons pour simplifier que l'intégrale de  $d\mu$  sur un Cantor  $C$  soit égale à 1 :  $\int_C d\mu = 1$ . On procède par itération : partant d'un segment  $[0, 1]$ , on pose  $\rho = 1$  partout ; l'intégrale sur le segment vaut bien 1. On divise ensuite le segment en trois, on retire la partie centrale, et l'on définit  $\rho$  égal à  $\frac{3}{2}$  sur  $[0, \frac{1}{3}]$  et  $[\frac{2}{3}, 1]$  et 0 sur  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  ; on a encore  $\int_0^1 \rho(x)dx = 1$ .

On peut ainsi définir  $d\mu$  comme une limite : pour toute fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$ , l'intégrale de  $f$  sur le Cantor  $C$  est :

$$\int_C f(x)d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \sum_{P_n} \int_{a_j}^{a_j+3^{-n}} f(x)dx$$

où  $P_n$  désigne l'ensemble des bords gauche des segments restant après  $n$  itérations dans la construction de l'ensemble de Cantor.

On démontre facilement (cf. annexe) que cette mesure vérifie la propriété d'échelle suivante :

$$\int_C f(x) d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_C f\left(\frac{x}{3}\right) d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_C f\left(\frac{x+2}{3}\right) d\mu(x) \quad (4.1)$$

Cette définition de  $d\mu$  a permis d'effectuer le calcul analytique de fonctions intéressantes pour l'étude de systèmes présentant une structure fractale.

## 4.2 Fonction de densité d'états intégrée

Afin de tester si cette mesure était appropriée, je l'ai appliquée pour calculer numériquement, avec Matlab, l'intégrale de la densité d'états :  $N(\epsilon) = \int_{\text{spectre}} \theta(\epsilon - \epsilon') d\mu(\epsilon')$ , où  $\theta$  est la fonction de Heaviside. J'ai obtenu le graphe suivant (fig. 4). On démontre aisément que  $N(\epsilon)$  est log-périodique :

$$\begin{aligned} N(\epsilon) &= \int_{\text{spectre}} \theta(\epsilon - \epsilon') d\mu(\epsilon') \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{spectre}} \theta\left(\epsilon - \frac{\epsilon'}{3}\right) d\mu(\epsilon') + \frac{1}{2} \int_{\text{spectre}} \theta\left(\epsilon - \frac{\epsilon'+2}{3}\right) d\mu(\epsilon') \\ &= \frac{1}{2} N\left(\frac{\epsilon}{3}\right) + g(\epsilon) \end{aligned}$$

D'après les préliminaires mathématiques, ceci prouve que  $N(\epsilon) = \epsilon^\alpha G(\ln(\epsilon))$  avec  $G$  une fonction périodique. Le graphe de la fonction est à rapprocher des graphes numériques et expérimentaux obtenus pour la cavité de Fibonacci ; les similarités observées semblent indiquer que cette mesure est pertinente.

## 4.3 Fonction de corrélation

La première des quantités auxquelles je me suis intéressée est la fonction de corrélation, ou probabilité de retour à l'origine,  $C(t)$ .

Par définition,  $C(t)$  est la moyenne temporelle de la probabilité  $p(t) = |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2$  de trouver le système dans sa configuration initiale après un temps  $t$  :

$$C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi(0) | \psi(t') \rangle|^2 dt'$$

Les résultats numériques dans le cas de la cavité de Fibonacci semblent indiquer que cette fonction est de la forme :  $C(t) = t^{-d_h} g(\ln(t))$ , où  $g$  est périodique et  $d_h$  est un réel positif.

### 4.3.1 Expression analytique de $C(t)$ dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor

On exprime  $|\psi(t)\rangle$  dans une base orthonormale de fonctions propres  $\{|\phi(\epsilon)\rangle\}$  du Hamiltonien,  $|\phi(\epsilon)\rangle$  étant la fonction propre associée à la valeur propre  $\epsilon$  :

$$|\psi(t)\rangle = \int_C g(\epsilon) e^{-i\epsilon t} |\phi(\epsilon)\rangle d\mu(\epsilon)$$

où  $g(\epsilon)$  est un coefficient complexe. On suppose  $\psi$  normalisée :

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle &= \int_{C \times C} g(\epsilon)^* g(\epsilon') \langle \phi(\epsilon) | \phi(\epsilon') \rangle e^{i(\epsilon - \epsilon')t} d\mu(\epsilon) d\mu(\epsilon') \\ &= \int_C |g(\epsilon)|^2 d\mu(\epsilon) \\ &= 1 \end{aligned}$$



On peut alors définir une nouvelle mesure  $d\tilde{\mu}(\epsilon) = |g(\epsilon)|^2 d\mu(\epsilon)$  ; pour simplifier, on considérera que cette mesure est celle définie à la section précédente.

Maintenant :

$$\begin{aligned}
C(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t | \langle \psi(0) | \psi(t') \rangle |^2 dt' \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \left| \int_C |g(\epsilon)|^2 e^{-i\epsilon t'} d\mu(\epsilon) \right|^2 dt' \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t \iint_{C \times C} e^{i(\epsilon' - \epsilon)t'} d\tilde{\mu}(\epsilon) d\tilde{\mu}(\epsilon') \\
&= \frac{1}{t} \iint_{C \times C} \frac{e^{i(\epsilon' - \epsilon)t} - 1}{i(\epsilon' - \epsilon)} d\tilde{\mu}(\epsilon) d\tilde{\mu}(\epsilon') \\
&= \iint_{C \times C} \underbrace{\text{sinc}((\epsilon' - \epsilon)t)}_{\text{nul par symétrie}} d\tilde{\mu}(\epsilon) d\tilde{\mu}(\epsilon') + i \iint_{C \times C} \frac{\text{sin}^2((\epsilon' - \epsilon)t/2)}{(\epsilon' - \epsilon)t}
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$C(t) = \iint_{C \times C} \text{sinc}((\epsilon' - \epsilon)t) d\tilde{\mu}(\epsilon) d\tilde{\mu}(\epsilon')$$

Avec la définition de  $d\mu$  et la propriété d'échelle (4.1), je suis parvenue à l'expression suivante (le détail du calcul est donné en annexe) :

$$C(t) = \frac{t^{-d}}{\ln(3)} \sum_n \epsilon_n e^{-2i\pi n \ln(t)/\ln(3)} \int_0^t u^{d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1} \text{sinc}(u) du \quad (4.2)$$

avec  $d = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$  et  $\epsilon_n = \int_{C \times C} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y+2|^{d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)}}}$ .

L'intégrale  $\int_0^t u^{d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1} \text{sinc}(u) du$  converge vers  $\int_0^\infty u^{d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1} \text{sinc}(u) du$  ; on peut donc, pour  $t$  suffisamment grand, remplacer  $\int_0^t$  par  $\int_0^\infty$ . Comme de plus

$$\int_0^\infty u^{d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1} \text{sinc}(u) du = \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1\right)\right) \Gamma\left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1\right)$$

on obtient finalement :

$$C(t) = \frac{t^{-d}}{\ln(3)} \sum_n \epsilon_n t^{-\frac{2i\pi n}{\ln(3)}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1\right)\right) \Gamma\left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1\right) \quad (4.3)$$

dans le cas normalisé ( $\hbar = 1$ , énergie maximale accessible  $E = 1$ ), soit dans le cas général :

$$C(t) = \left(\frac{E}{e.u.}\right)^2 \left(\frac{Et}{\hbar}\right)^{-d} \sum_n \frac{\epsilon_n}{\ln(3)} \left(\frac{Et}{\hbar}\right)^{-\frac{2i\pi n}{\ln(3)}} \sin\left(\frac{\pi}{2}(d_n - 1)\right) \Gamma(d_n - 1) \quad (4.4)$$

Une étude analytique (cf. annexe), confirmée par une étude numérique (cf. annexe), du comportement asymptotique des coefficients montre que :

$$|\epsilon_n \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1\right)\right) \Gamma\left(d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} - 1\right)| = O\left(\frac{1}{n^{5/2-d}}\right)$$

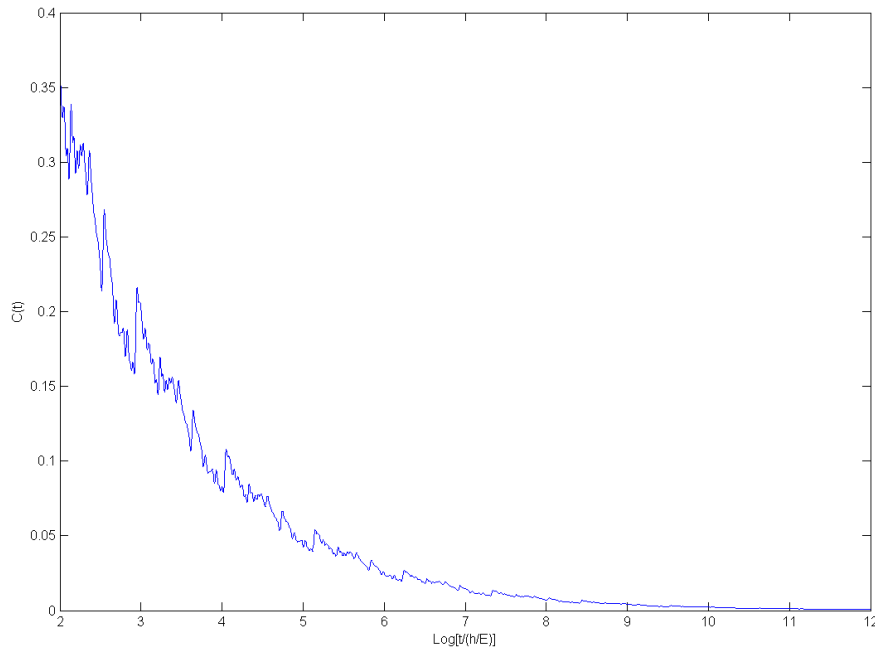


FIGURE 4.1 – Fonction de corrélation dans le cas où le spectre est un ensemble de Cantor ; échelle log

#### 4.4 Rapport de participation (participation ratio)

Le rapport de participation (participation ratio) est également une quantité intéressante pour l'étude de la dynamique et de l'étalement d'un paquet d'onde.

Par définition, le rapport de participation est :

$$P_\psi = \frac{1}{\int_{\text{espace}} |\langle x|\psi\rangle|^4 dx} \quad (4.5)$$

Cette fonction renseigne sur l'étalement spatial du paquet d'onde, décrit par  $|\psi\rangle$ . Si l'état est localisé, alors  $P_\psi \simeq 0$ ; s'il est étendu, alors  $P_\psi \simeq 1$ . Dans le cas de la cavité de Fibonacci, les résultats numériques montrent que le rapport de participation moyenné dans le temps présente des oscillations log-périodiques dans le temps; j'ai donc étudié cette fonction dans le cas d'un spectre de Cantor :

$$P_\psi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{dt'}{\int_{\text{espace}} |\langle x|\psi(t')\rangle|^4 dx} \quad (4.6)$$

L'idée est de se ramener à une intégrale sur le spectre, qui a une structure fractale et qui serait à l'origine des oscillations log-périodiques s'il y a lieu.

On utilise pour cela le formalisme des fonctions de Green. On peut en effet relier la transformée de Fourier de la fonction de Green à la densité d'état locale [8]; les calculs sont de plus valables dans le cas d'un spectre fractal. Le détail des calculs est fourni en annexe. Pour ne donner que les

grandes lignes :

$$\begin{aligned}
|\psi(x, t)| &= | \langle x | \psi(t) \rangle | \\
&= | \langle x | e^{-iHt} | \psi(0) \rangle | \\
&= \left| \int_{space} \langle x | e^{-iHt} | x' \rangle \psi(x', 0) dx' \right| \\
&= \left| \int_{space} \int_{spectrum} e^{-i\epsilon t} ImG(x, x', \epsilon) \psi(0, t) dx' d\mu(\epsilon) \right| \\
&= \left| \int_{space} \int_{spectrum} e^{-i\epsilon t} \phi(x, \epsilon)^* \phi(x', \epsilon) \psi(x', 0) dx' d\mu(\epsilon) \right|
\end{aligned}$$

On obtient donc finalement :

$$|\psi(x, t)| = \left| \int_{space} \int_{spectrum} e^{-i\epsilon t} \phi(x, \epsilon)^* \phi(x', \epsilon) \psi(x', 0) dx' d\mu(\epsilon) \right| \quad (4.7)$$

A ce stade, deux pistes sont envisageables pour poursuivre.

#### 4.4.1 Majoration de $\int \phi(x, \epsilon)^* \phi(x', \epsilon) d\mu(\epsilon)$

Un encadrement des termes non diagonaux de la résolvante, c'est-à-dire de la fonction de Green en des valeurs  $x, x'$  différentes  $G(x, x', t)$ , a été établi ([9], [10]) pour un grand nombre de processus de diffusion :

$$F_t(c_1, c_2, x, x') \leq G(x, x', t) \leq F_t(c_3, c_4, x, x') \quad (4.8)$$

avec

$$F_t(c_i, c_j, x, x') = \frac{c_i}{t^{d_s/2}} \exp -c_j \left( \frac{|x - x'|^{d_w}}{t} \right)^{\frac{1}{d_w-1}}$$

où  $c_1, c_2, c_3, c_4$  sont des constantes positives,  $d_w$  la dimension de marche (walk dimension) intervenant dans la relation de dispersion  $\langle x^2(t) \rangle = t^{2/d_w}$ ,  $d_s$  la dimension spectrale telle que  $d_s = \frac{2d_f}{d_w}$  et  $d_f$  la dimension de Hausdorff de l'espace dans lequel le phénomène diffusif a lieu. Il s'agit ici d'une majoration pour les problèmes de diffusion ; toutefois, il semble possible de transposer cet encadrement dans le cas de l'équation de Schrodinger sans potentiel : en effet, la différence avec l'équation de la diffusion réside dans le facteur  $i$  dans la dérivée temporelle, mais dans les deux cas les fonctions propres intervenant dans la définition de la fonction de Green (ou propagateur) sont fonctions propres du Laplacien, et ne sont pas des fonctions du temps.

*Remarque* : le cas des termes diagonaux est lui mieux connu ; il a même été prouvé ([10]) dans le cas de l'équation de diffusion que

$$G(x, x', t) = t^{-\frac{d_f}{d_w}} F \left( \frac{2\pi \ln(t)}{d_w \ln(l)} \right)$$

Le cas des termes non-diagonaux est bien moins maîtrisé et fait l'objet de recherches actives actuellement.

#### 4.4.2 Supposer $\overline{\phi(0, \epsilon)^* \phi(x, \epsilon)} = f \left( \frac{x}{l_\epsilon} \right)$

Dans le cas d'une variété euclidienne, les fonctions propres du Laplacien vérifient la relation suivante :  $\overline{\phi(\mathbf{r}, \epsilon)^* \phi(\mathbf{r}', \epsilon)} = f \left( \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{l_\epsilon} \right)$ , où la moyenne porte sur les couples  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  tels que  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  est constante et où  $l_\epsilon$  est une longueur caractéristique dépendant de l'énergie  $\epsilon$ . Ce résultat, bien que non démontré pour le cas d'un Laplacien défini sur une fractale, a néanmoins été utilisé comme hypothèse dans des travaux récents ([10]).

On pourrait, dans notre cas, effectuer la même hypothèse (en imposant donc de plus que le Hamiltonien soit réduit à un Laplacien).

Cette hypothèse mène à une expression analytique de la fonction de participation mettant en évidence sa log-périodicité.

Il serait donc intéressant de vérifier numériquement cette conjecture. Il faut pour cela concevoir un système tel que le spectre du Laplacien soit un ensemble de Cantor ; cette étude numérique n'est pour le moment pas terminée mais fait partie de mon programme de recherche pour l'année scolaire à venir, (durant laquelle je prolonge mon stage de M1 dans le cadre d'une année arpe).

## 4.5 Emission spontanée

Un autre problème intéressant sur le plan théorique et expérimental est celui de l'émission spontanée d'un système discret couplé avec un quasi-continuum fractal. Expérimentalement, on peut concevoir une cavité ayant la géométrie de la cavité de Fibonacci décrite au chapitre 2 ; par exemple, une cavité diélectrique composée de deux types de couches  $A$  et  $B$ , de largeurs  $d_A$  et  $d_B$  et d'indices de réfraction  $n_A$  et  $n_B$  respectivement ([11]). La règle d'or de Fermi doit être réexaminée et l'on peut montrer [11] que, aux temps longs, il n'y a pas de décroissance type Wigner-Weisskopf, comme c'est le cas pour un spectre continu.

Considérons le cas où les modes de la cavité forment un ensemble de Cantor  $C$  par exemple. La probabilité qu'un atome à deux niveaux, initialement dans l'état excité d'énergie  $E_i$ , quitte l'état initial sous l'effet du couplage avec la cavité et qu'il y ait au bout d'un temps  $t$  une transition vers un état d'énergie  $E_f$  du continuum, avec un écart de  $\Delta E$  autour de  $E_f$ , est (en posant  $\hbar = 1$ ) :

$$P_{fi}(t) \propto \int_{\Delta E} \left( \frac{\sin(E - E_i)t}{E - E_i} \right)^2 d\mu(E)$$

Si de plus  $E_i \in C$ , alors, en raison de la symétrie de  $C$ , un voisinage de  $E_i$  conserve la même propriété d'échelle. On peut donc effectuer un changement de variable  $E' = E - E_i$  et appliquer la formule (4.1) :

$$\begin{aligned} P_{fi}(t) &\propto \int_{\Delta E + E_i} \left( \frac{\sin E't}{E'} \right)^2 d\mu(E') \\ &\propto \frac{1}{2} \int_{\Delta E + E_i} \left( \frac{\sin E't/3}{E'/3} \right)^2 d\mu(E') + \frac{1}{2} \int_{\Delta E + E_i} \left( \frac{\sin(E'+2)t/3}{(E'+2)/3} \right)^2 d\mu(E') \\ &\propto \frac{3^2}{2} P_{fi} \left( \frac{t}{3} \right) + \underbrace{\frac{3^2}{2} \int_{\Delta E + E_i} \left( \frac{\sin(E'+2)t/3}{(E'+2)/3} \right)^2 d\mu(E')}_{g(t)} \end{aligned}$$

ce qui, en suivant les mêmes techniques de calculs que dans les paragraphes précédents, conduit à :

$$P_{fi}(t) \propto \sum_n M_g(s_n) t^{2-d-2i\pi/\ln 3}$$

avec  $d = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ ,  $s_n = d - 2 + \frac{2i\pi}{\ln 3}$  et  $M_g$  la transformée de Mellin de  $g$ . On n'obtient donc pas la règle d'or de Fermi pour  $t \gg 1$ . On observe que  $P_{fi}$  se comporte comme une loi de puissance modulée par des oscillations log-périodiques.

## Chapitre 5

# Bilan et perspectives

L'étude analytique d'un modèle théorique où le spectre du Hamiltonien est une fractale "simple" (un ensemble de Cantor triadique) a permis d'aboutir à une expression exacte de la fonction de corrélation (ou retour à l'origine), mettant explicitement en évidence les oscillations log-périodiques de cette quantité. On devrait également parvenir sous peu à démontrer rigoureusement la log-périodicité pour la moyenne temporelle du rapport de participation. Une simulation numérique pour tester la conjecture concernant le rapport de participation est en cours.

Ces résultats sont en accord avec les résultats et hypothèses théoriques formulées sur le lien de causalité entre la structure fractale et les oscillations log-périodiques de certaines quantités dynamiques, ainsi qu'avec les résultats expérimentaux et numériques récents obtenus avec la cavité de Fibonacci.

Notons qu'il est plus aisé expérimentalement d'observer des quantités dynamiques, bien qu'il soit également possible d'observer les oscillations log-périodiques de quantités purement spectrales [??].

Cette étude analytique a donc permis de comprendre plus en profondeur le lien entre la structure fractale du spectre et ce comportement particulier, et ouvre de nouvelles pistes de recherche.

Une autre piste de recherche est la suivante : la cavité de Fibonacci permettrait d'étudier l'émission spontanée pour un système discret couplé à un continuum. On peut de plus pousser l'étude plus loin et s'intéresser à l'interaction de deux atomes à deux niveaux couplés à un quasi-continuum fractal, introduisant le phénomène de superradiance.

Ces perspectives font également partie de mon programme de recherche pour l'année à venir.



# Chapitre 6

## Annexes

### 6.1 Log-périodicité de fonctions vérifiant $f(x) = \frac{1}{b}f(ax) + g(x)$

Soit  $f \in \mathbb{R}- > \mathbb{C}$  vérifiant une égalité du type :

$$f(x) = \frac{1}{b}f(ax) + g(x). \quad (6.1)$$

Montrons que  $f$  est de la forme :

$$f(x) = x^{\ln(b)/\ln(a)} G\left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)$$

avec  $G$  1-périodique.

On utilise pour cela la transformée de Mellin :

Soit  $]a; b[$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbb{R}$ , et soit  $f \in \mathbb{R}- > \mathbb{C}$  mesurable au sens de Lebesgue, telle que pour tout  $\sigma \in ]a; b[$ ,  $\int_0^\infty |f(x)|x^{\sigma-1}dx$ .

La **transformée de Mellin** de  $f$  est alors définie par :

$$M_f(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx$$

Si de plus il existe  $c \in ]a; b[$  tel que  $\tau- > M_f(c + i\tau)$  soit intégrable, alors la **transformée de Mellin inverse** de  $M_f$  redonne  $f$  :

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} M_f(s)x^{-s}ds$$

Appliquons la transformée de Mellin à l'égalité (??), en supposant que l'intersection des domaines de définition de  $M_f$  et  $M_g$  soit non vide :

$$\begin{aligned} M_f(s) &= \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \\ &= \frac{1}{b} \int_0^\infty f(ax)x^{s-1}dx + \int_0^\infty g(x)x^{s-1}dx \\ &= \frac{1}{b} \int_0^\infty f(u) \left(\frac{u}{a}\right)^{s-1} \frac{du}{a} + M_g(s) \end{aligned}$$

Donc :

$$M_f(s) = \frac{M_g(s)}{1 - \frac{a^{-s}}{b}}$$

puis, en appliquant la transformée de Mellin inverse :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} M_f(s) x^{-s} ds \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{M_g(s)}{1 - \frac{a^{-s}}{b}} ds \end{aligned}$$

En supposant maintenant que  $M_g$  n'ai pas de pôles, la formule des résidus donne finalement :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_n \left[ \frac{(s - s_n) M_g(s)}{1 - \frac{a^{-s}}{b}} \right]_{s=s_n} \quad s_n = -\frac{\ln a}{\ln b} - \frac{2i\pi n}{\ln b}, \text{ pôles de } \frac{M_g(s)}{1 - \frac{a^{-s}}{b}} \\ &= x^{\ln(b)/\ln(a)} \underbrace{\sum_n c_n x^{2i\pi n / \ln b}}_{G_x} \end{aligned}$$

On obtient donc la forme voulue.

## 6.2 Calcul de la fonction de corrélation dans la cas où le spectre est un ensemble de Cantor

### 6.2.1 Expression analytique

Il s'agit de calculer :

$$C(t) = \iint_{C \times C} \text{sinc}((\epsilon' - \epsilon)t) d\tilde{\mu}(\epsilon) d\tilde{\mu}(\epsilon')$$

où  $C$  désigne un ensemble de Cantor triadique.

L'idée du calcul est d'abord de se ramener à une intégrale simple, puis d'utiliser les transformées de Mellin et les propriétés d'échelle de la mesure.

Effectuons le changement de variable  $l = |\epsilon' - \epsilon|$  et notons  $dS(l)$  la surface (pour la mesure  $\mu$ ) du tapis de Cantor contenu dans les deux bandes d'épaisseur infinitésimale situées en  $\epsilon = \epsilon' + l$  et  $\epsilon = \epsilon' - l$  (cf fig.). Comme  $\text{sinc}((\epsilon' - \epsilon)t)$  peut être considéré constante sur ces deux bandes élémentaires, on obtient :

$$C(t) = \int_0^1 \text{sinc}(lt) dS(l)$$

Il s'agit donc de déterminer  $S(l)$ .

Une première approche consiste à calculer directement la surface du tapis de Cantor comprise entre les deux droites  $\epsilon = \epsilon' + l$  et  $\epsilon = \epsilon' - l$ , puis de prendre la différentielle de cette fonction. On procède en calculant la surface des carrés compris entre ces deux droites à l'étape  $n$  de la construction du tapis de Cantor, puis l'on fait tendre  $n$  vers l'infini. Ce calcul est assez laborieux et peu intéressant, et l'expression obtenue n'est pas exploitable pour le calcul de  $C(t)$ . Toutefois, cette expression est intéressante car elle renseigne sur le comportement de  $C(t)$  et permet de tracer la fonction  $S(l)$ .

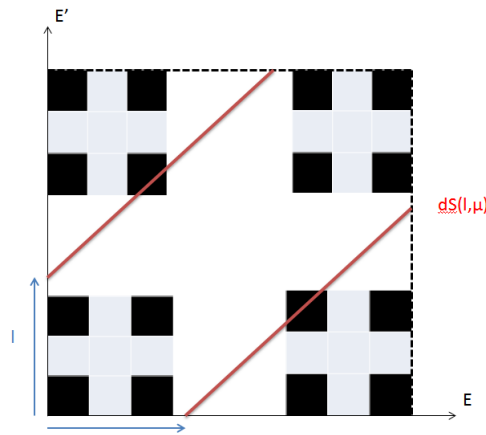
Exprimons  $l \in [0, 1]$  en base trois, avec dégénérescence :  $l = \frac{1}{3^{N_0}} \left( 1 + \sum_{i \in \{1, 2, \dots\}} \frac{1}{3^{N_i}} \right)$ , avec possiblement  $N_i = N_j$  pour  $i \neq j$ . Alors :

$$S(l) = \frac{1}{2^{N_0}} \left( 1 + \frac{1}{2} \prod \frac{1}{2^{2N_i}} \right) \times \begin{cases} \frac{1}{2^{N_k}} & , k \text{ pair} \\ \frac{1}{2^{2N_k}} & , k \text{ impair} \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction est donnée fig. On vérifie facilement que :  $S(3^n l) = 2^n S(l)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . De plus, une étude numérique suggère que  $S(l) = l^{\ln(2)/\ln(3)} g\left(\frac{\ln(x)}{\ln(3)}\right)$  avec  $g$  périodique.

Une autre méthode pour obtenir  $S(l)$  utilise les transformées de Mellin.




 FIGURE 6.1 – Tapis de Cantor ; bandes rouges : surface  $dS(l)$ 

Posons :  $\zeta(\alpha) = \int_0^1 l^{-\alpha} dS(l, \mu)$ . Il s'agit de la transformée de Mellin de  $dS(l)$  au point  $1 - \alpha$  :  $M_{dS}(s) = \int_0^1 l^{s-1} dS(l, \mu)$ . Il est usuel, dans les problèmes 1D de calcul de produit de convolution avec des ondelettes, d'introduire la fonction zeta associée à la mesure  $\nu$  du problème :  $\zeta(s) = \int \frac{d\nu(x)}{x^s}$  ; nous transposons ici cette méthode au cas 2D.

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha) &= \int_0^1 l^{-\alpha} dS(l, \mu) \\ &= \iint_{C \times C} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \iint_{C \times C} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{3^{-\alpha}|x-y|^\alpha} + \iint_{C \times C} \frac{d\mu(x)d\mu(y)}{3^{-\alpha}|x-y+2|^\alpha} \\ &= \frac{3^\alpha}{2} \zeta(\alpha) + \epsilon(\alpha) \end{aligned}$$

d'où

$$\zeta(\alpha) = \frac{\epsilon(\alpha)}{1 - \frac{3^\alpha}{2}}$$

La transformée de Mellin inverse permet alors d'obtenir  $dS(l)$  :

$$\begin{aligned} dS(l, \mu) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} M_{dS}(\alpha) l^{-\alpha} d\alpha \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \zeta(1-\alpha) l^{-\alpha} d\alpha \\ &= \sum_n \left[ \frac{\alpha - (1 - \alpha_n)}{1 - \frac{3^{1-\alpha}}{2}} l^{-\alpha} \epsilon(\alpha) \right]_{\alpha=\alpha_n} \end{aligned}$$

avec  $1 - \alpha_n = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ ,  $d = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ .

Finalement :  $dS(l, \mu) = \frac{l^{d-1}}{\ln(3)} \sum_n l^{\frac{2i\pi n}{\ln(3)}} \epsilon \left( d + \frac{2i\pi n}{\ln(3)} \right) = \frac{l^{d-1}}{\ln(3)} \sum_n l^{\frac{2i\pi n}{\ln(3)}} \epsilon_n$ . D'où

$$\begin{aligned} C(t) &= \int_0^1 \text{sinc}(lt) dS(l, \mu) \\ &= \frac{1}{\ln(3)} \sum_n \epsilon_n t^{-\frac{2i\pi n}{\ln(3)}} \sin \left( \frac{\pi}{2} (d_n - 1) \right) \Gamma(d_n - 1) \end{aligned}$$

### 6.2.2 Comportement asymptotique des coefficients

# Chapitre 7

## Bibliographie

- [1] D. Damanik and A. Gorodetski, Commun. Math. Phys. 305, 221 (2011)
- [2] For a recent review, E. Akkermans, Contemporary Mathematics 601, 1-22 (2013), arXiv :1210.6763.
- [3] C. Janot, "Quasicrystals, a primer", Carendon press Oxford, 1994
- [4] Tanese, E. Gurevich, A. Lemaitre, E. Galopin, I. Sagnes, A. Amo, J. Bloch, E. Akkermans, arxiv :1311.3453, 2013
- [5] J. Feder, "Fractals"
- [6] E. Akkermans, O. Benichou, G. Dunne, A. Teplyaev and R. Voituriez, Phys. Rev. E 86, 061125 (2012).
- [7] J. Bellissard, A. Bovier and J.M. Ghez, Reviews in Math. Physics, Vol. 4, No. 1, 1-37 (1992)
- [8] E. Akkerman, G. Montambaux, "Mesoscopic physics of electrons and photons", Cambridge University Press, 2007
- [9] M. T. Barlow and E. A. Perkins, Prob. Theor. Rel. Fields 79, 543 (1988); M. T. Barlow, Lect. Notes Math. 1690, 1 (1998).
- [10] E. Akkermans, O. Benichou, G. V. Dunne, A. Teplyaev, and R. Voituriez, "Spatial log-periodic oscillations of first-passage observables in fractals", PHYSICAL REVIEW E 86, 061125 (2012)
- [11] E. Akkermans, E. Gurevich "Spontaneous emission from a fractal vacuum", EPL, 103 (2013) 30009