

Exercices MPSI — colle n° 9

Samuel Debray

Vendredi 10 décembre 2021

Exercice 1. Soit $A = \left\{ \frac{pq}{p^2+q^2+1}, (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$. Montrer que A admet un sup et un inf et les déterminer.

Exercice 2. Soit f une fonction croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit X une partie non vide et majorée de \mathbb{R} .

1. Montrer que si $f(\sup(X)) \geq \sup(f(X))$.
2. Montrer que si f est continue, il y a égalité.
3. Donner un exemple où il n'y a pas égalité.

Exercice 3. Soit A une partie bornée de \mathbb{R} non vide. On note $D = \{|x - y|, x, y \in A\}$. Montrer que D admet une borne supérieure et la déterminer.

Exercice 4. Soit $A = \{xy, (x, y) \in]0, +\infty[^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$. Montrer que A admet un sup et un inf et les déterminer. Admet-il un max ? un min ?

Exercice 5. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ pour $n \geq 2$.

Exercice 6. Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ croissante. On veut montrer que f possède un point fixe.

1. Montrer que l'on peut poser $a = \sup\{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq x\}$.
2. Montrer que $f(a) \leq a$ et $a \leq f(a)$ et conclure.

Exercice 7. Soit $A = \{\sqrt{n} - \sqrt{m}, (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$.

1. Montrer que si $a \in A$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $ka \in A$.
2. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, A \cap]0, \varepsilon[\neq \emptyset$.
3. En déduire que A est dense dans \mathbb{R} .

Exercice 8. Soient (X, \leq) et (Y, \leq) deux ensembles ordonnés. On définit sur $X \times Y$ la relation $(x, y) \leq (x', y')$ ssi $(x < x')$ ou $(x = x' \text{ et } y \leq y')$.

Montrer que c'est un ordre et qu'il est total ssi X et Y sont totalement ordonnés.

Exercice 9. Soient X un ensemble et $f: X \rightarrow X$ une application inversible. On définit la relation binaire \sim par

$$\forall (x, x') \in X^2, x \sim x' \iff \exists n \in \mathbb{Z} \cdot f^n(x) = x'.$$

1. Montrer que \sim est une relation d'équivalence.
2. Si f est une involution, que peut-on dire des classes d'équivalence ?
3. Soit $f: X \rightarrow X$ telle que $f^3 = \text{id}$.
 - (a) Montrer que f est inversible.
 - (b) Que peut-on dire des classes d'équivalence ?