

Exercices MPSI — colle n° 8

Samuel Debray

Vendredi 3 décembre 2021

Exercice 1. Résoudre $y' + 2y = 2 \sinh(2x)$.

Exercice 2. Résoudre $\sin(x)y' = \cos(x)y + 2x \sin^2(x)$ sur $]0, \pi[$.

Exercice 3. Résoudre $(x^2 - 1)y'(x) + xy(x) + 3(x - x^3) = 0$ sur $] - 1, 1[$.

Exercice 4. Résoudre $y'' + y' + y = \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

Exercice 5. Résoudre $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^x \sin^2(x)$ avec $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

Exercice 6. Résoudre le système différentiel : $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -2 \end{cases}$.

Exercice 7. Déterminer les $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x t f(t) dt = 1.$$

Exercice 8. Résoudre $xy''(x) - y'(x) - x^3y(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$ en posant $z : t \mapsto y(\sqrt{t})$.

Exercice 9. Soit $(E) : y'' + \cos(x)y = 0$.

1. Montrer que si y est une solution de (E) telle que $y'(0) = 0$ alors y est paire.

2. Montrer que si y vérifie (E) et $\begin{cases} y(0) = y(2\pi) \\ y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}$ alors y est 2π -périodique.

Exercice 10 (principe des zéros isolés). Soient I un intervalle de \mathbb{R} et a et b deux fonctions continues sur I . Notons z une solution non nulle de $(E) : y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ sur I .

Montrer que les zéros de z sont isolés, c-à-d que pour tout zéro t_0 de z , il existe $\varepsilon > 0$ tel que z ne s'annule pas sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\setminus \{t_0\}$.

Exercice 11. Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in [0, 1], f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$.

Exercice 12. Déterminer les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t) dt = 0.$$

Exercice 13. Déterminer les applications dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$.

Exercice 14. Déterminer les applications réelles f dérivables sur \mathbb{R} telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2 - x)$.

Exercice 15. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dérivables telles que $\forall s, t \in \mathbb{R}, f(s + t) = f(s)f(t)$.

Exercice 16. Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x)$.