

Exercices MPSI — colle n° 6

Samuel Debray

Vendredi 12 novembre 2021

Exercice 1 (des primitives en vrac). Calculer les primitives suivantes en précisant à chaque fois le ou les intervalles où ceci est légitime :

$$\int \exp(-\sqrt{x}) \, dx \quad \int \cos(\ln(x)) \, dx \quad \int \ln(1+x^2) \, dx \quad \int \arctan(x) \, dx \quad \int t \sin^2(t) \, dt$$
$$\int \frac{x^2 \, dx}{(x-1)^2(x^2+4)} \quad \int \cos(2x) \cos^2(x) \, dx \quad \int \frac{dt}{\sin(t) + \cos(t)} \text{ sur } \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\text{ en posant } u = \cos(t)$$

Exercice 2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\sin^2(x) + \cos(x)} \, dx$.

Exercice 3. Calculer $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}} \, dx$.

Exercice 4. Calculer $\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$ pour $a > 0$.

Exercice 5. Calculer $\int \frac{1}{1 + \tanh(x)} \, dx$.

Exercice 6. Exprimer $\tanh(x)$, $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$ en fonction de $t = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$. Calculer $\int \frac{dx}{\sinh(x)}$ en posant $t = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice 7. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$. Obtenir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n . En déduire I_1 , I_2 et I_3 .

Exercice 8. Soit $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n \, dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .

2. Calculer I_n .

3. En déduire $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$.