

Exercices MPSI — colle n° 5

Samuel Debray

Mardi 19 octobre 2021

Exercice 1. 1. Montrer que $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. Déterminer la limite de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x < y$, on a $\frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < \frac{x+y}{2}$.

Exercice 3 (lemme de GIBBS). 1. Justifier que $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.

2. Soient (p_1, \dots, p_n) et (q_1, \dots, q_n) des n -uplets de réels strictement positifs vérifiant $\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n q_k = 1$.
Montrer que

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln(q_i) \leq \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i).$$

Étudier les cas d'égalité.

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes :

$$e^x + e^{1-x} = e + 1 \quad x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \quad 2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

Exercice 5. Montrer que $\forall x \in]0, 1[, x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 6. Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système suivant :
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ e^a + e^b + e^c = 3 \end{cases}.$$

Exercice 7. Résoudre $\tan(x) \tan(2x) = 1$.

Exercice 8. Calculer $\sum_{k=1}^4 \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$.

Exercice 9. Simplifier $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

Exercice 10. 1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\arctan(p+1) - \arctan(p)$.

2. Étudier la limite de la suite S définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = \sum_{p=0}^n \arctan\left(\frac{1}{p^2 + p + 1}\right).$$

Exercice 11. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \cosh(a + kb)$ et $\sum_{k=0}^n \sinh(a + kb)$.

Exercice 12. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que

$$\tanh((n+1)x) - \tanh(nx) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(nx) \cosh((n+1)x)}.$$

2. En déduire une expression de $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\cosh(kx) \cosh((n+1-k)x)}$.