

Exercices MPSI — colle n° 4

Samuel Debray

Vendredi 15 octobre 2021

1 Analyse réelle

Exercice 1. Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Exercice 2. 1. Montrer que $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. Déterminer la limite de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 3. Montrer que $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle à préciser et calculer sa réciproque. Étudier également la dérivabilité de f et f^{-1} .

Exercice 4. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaire et bijective. Montrer que f^{-1} est impaire. Cet énoncé est-il encore vrai pour paire ?

Exercice 5. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 6 (lemme de GIBBS). 1. Justifier que $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.

2. Soient (p_1, \dots, p_n) et (q_1, \dots, q_n) des n -uplets de réels strictement positifs vérifiant $\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n q_k = 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln(q_i) \leq \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i).$$

Étudier les cas d'égalité.

Exercice 7. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} \ln^3(x)}{x^4} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln^3(x^3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x \ln^3(-x)$$

Exercice 8. Résoudre l'équation $2x \ln(x) + 3(x-1) = 0$.

Exercice 9. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x < y$, on a $\frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < \frac{x+y}{2}$.

2 Révisions de la semaine dernière

Exercice 10. Soit $f: E \rightarrow F$. Montrer que

1. f injective ssi $\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$.
2. f surjective ssi $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 11. Soit $f: E \rightarrow F$. Montrer que f est bijective ssi $\forall A \in \mathcal{P}(E), f(A^c) = f(A)^c$.

Exercice 12. Soit $f: X \rightarrow X$. On suppose $f \circ f = f$. Montrer que

1. si f est injective alors $f = \text{id}$.
2. si f est surjective alors $f = \text{id}$.

Exercice 13. Soient $f, g: X \rightarrow X$ telles que $f \circ g \circ f = g$ et $g \circ f \circ g = f$.

1. Montrer que si f est injective alors f et g sont bijectives.
2. Montrer que si f est surjective alors f et g sont bijectives.

Exercice 14. Soit $f: \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n^2 \end{array}$.

1. Existe-t-il $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$?
2. Existe-t-il $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$?

Exercice 15. Soit $f: E \rightarrow I$ surjective. Montrer que les $(f^{-1}(\{i\}))_{i \in I}$ forment une partition de E .