

Exercices MPSI — colle n° 3

Samuel Debray

Vendredi 8 octobre 2021

Exercice 1. Que dire de A et B tels que $A \cup B = A \cap B$?

Exercice 2. Soient $A, B \subseteq E$. Existe-t-il $X \subseteq E$ tel que $A \cup X = B$?

Exercice 3. Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$? Et $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

Exercice 4. Montrer que $A \cup B = A \cap C \iff B \subseteq A \subseteq C$.

Exercice 5. Montrer que $(A \cap B = A \cap C) \iff (A \cap B^c = A \cap C^c)$.

Exercice 6 (différence symétrique). On appelle différence symétrique de A et B l'ensemble $A \Delta B := \{x \in A \cup B \mid x \notin A \cap B\}$.

1. Montrer que $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.
2. Montrer que $A \Delta B = B \iff A = \emptyset$.

Exercice 7 (fonctions indicatrices). Soit $A \subseteq E$. On appelle fonction indicatrice de A dans E l'application

$$\mathbf{1}_A: \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}.$$

De quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles les indicatrices ?

$$\min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B), \quad \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B), \quad \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B, \quad 1 - \mathbf{1}_A, \quad \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2.$$

Exercice 8. Soit $f: E \rightarrow F$. Montrer que

1. f injective ssi $\forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$.
2. f surjective ssi $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 9. Soit $f: E \rightarrow F$. Montrer que f est bijective ssi $\forall A \in \mathcal{P}(E), f(A^c) = f(A)^c$.

Exercice 10. Soit $f: X \rightarrow X$. On suppose $f \circ f = f$. Montrer que

1. si f est injective alors $f = \text{id}$.
2. si f est surjective alors $f = \text{id}$.

Exercice 11. Soient $f, g: X \rightarrow X$ telles que $f \circ g \circ f = g$ et $g \circ f \circ g = f$.

1. Montrer que si f est injective alors f et g sont bijectives.
2. Montrer que si f est surjective alors f et g sont bijectives.

Exercice 12. Soit $f: \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n^2 \end{cases}$.

1. Existe-t-il $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$?
2. Existe-t-il $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$?

Exercice 13. Soit $f: E \rightarrow I$ surjective. Montrer que les $(f^{-1}(\{i\}))_{i \in I}$ forment une partition de E .