

Exercices MPSI — colle n° 28

Samuel Debray

Jeudi 16 juin 2022

Exercice 1. Soient $a \neq b$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On pose

$$\Delta_n(x) := \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a + x & \cdots & a + x \\ b + x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \cdots & b + x & \lambda_n + x \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Calculer $\Delta_n(x)$ et en déduire $\Delta_n(0)$.

Exercice 2. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Calculer $\begin{vmatrix} a_1 + x & (x) \\ & \ddots \\ (x) & a_n + x \end{vmatrix}$.

Exercice 3. Calculer $\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}_{[n]}$ en fonction des termes de $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 4. Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R} \cdot f(x) = 2 \int_0^x t f(t) dt + 1$.

Exercice 5 (intégrales de WALLIS). Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.

1. Calculer I_{2p} et I_{2p+1} .
2. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et strictement positive.
3. En déduire $I_n \sim I_{n+1}$.
4. Calculer $(n+1)I_n I_{n+1}$.
5. Donner alors un équivalent simple de I_n .

Exercice 6. Déterminer la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$.

Exercice 7. 1. Montrer que $\forall x \in [0, 1] \cdot x^2 - \frac{1}{3}x^4 \leq \sin^2(x) \leq x^2$.

2. En déduire la limite de $u_n = \sum_{k=1}^n \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)$.

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{K})$. Déterminer la limite de $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right)$.

Exercice 9. Montrer que $\min_{f \in F} \int_0^1 f''(t)^2 dt = 3$ où $F := \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) \wedge f'(0) = 1\}$.

Exercice 10. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t^n) dt$.

Exercice 11. Donner un DAS à deux termes de $u_n = \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt$.

Exercice 12. Étudier la fonction $f: x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{1+t^5}$.

Exercice 13. Soit $u \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que u'' est monotone et il existe $\mu > 0$ tel que $|u'| \geq \mu$. Montrer que $\left| \int_a^b e^{iu(t)} dt \right| \leq \frac{4}{\mu}$.