

Exercices MPSI — colle n° 27

Samuel Debray

Jeudi 9 juin 2022

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui commutent avec toutes les permutations de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 2. Montrer que si deux cycles commutent alors ils sont à supports disjoints ou égaux.

Exercice 3. Montrer que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme le produit de deux cycles.

Exercice 4 (inégalités de réordonnement). Soient $a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq \dots \leq b_n$ des réels. Déterminer

$$\min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \quad \text{et} \quad \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)}.$$

Exercice 5. Calculer
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ bcd & acd & abd & abc \end{vmatrix}.$$

Exercice 6. Calculer $\det(\cos((i-1)x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \cdot \det(A + X) = \det(X) \implies A = 0.$$

Exercice 8. Soient $(X_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ des variables aléatoires i.i.d. On note M la matrice des $(X_{i,j})$. Déterminer $\mathbb{E}[\det(M)]$ ainsi que $\mathbb{V}[\det(M)]$.

Exercice 9. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$. Montrer que si $\text{rg}(B) = 1$ alors

$$\det(A + B) \det(A - B) \leq \det(A)^2.$$

Exercice 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à coefficients diagonaux égaux à ± 1 telle que $A + D$ est inversible.

Exercice 11 (déterminants de CAUCHY et HILBERT). Pour $1 \leq i, j \leq n$, on considère $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ tels que $a_i + b_j \neq 0$.

1. Calculer

$$\det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

2. Traiter en particulier le cas où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \cdot a_i = b_i = i$.

Exercice 12. Montrer que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et admet des limites finies en $\pm\infty$ alors elle est uniformément continue.

Exercice 13. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est périodique alors elle est uniformément continue.

Exercice 14 (inégalité de HADAMARD). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $c_1, \dots, c_n$ les colonnes de A et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|c_i\|$$

et en déduire une majoration de $\det(A)$ en fonction de n et de $M := \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$.