

# Exercices MPSI — colle n° 26

Samuel Debray

Jeudi 2 juin 2022

**Exercice 1.** À quelle condition deux réflexions commutent-elles ?

**Exercice 2.** Soient  $E$  un espace euclidien et  $a \neq b \in E$  tels que  $\|a\| = \|b\|$ . Montrer qu'il existe une unique réflexion échangeant  $a$  et  $b$ .

**Exercice 3.** Soient  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 2$  et  $x \neq y \in E$  tels que  $\langle x | y \rangle = \|y\|^2$ . Montrer qu'il existe un unique hyperplan  $H$  de  $E$  tel que  $y = p_H(x)$ .

**Exercice 4.** On munit  $\mathfrak{S}_n$  de la probabilité uniforme. On effectue un tirage aléatoire d'une permutation  $\sigma$  et on note  $X$  le nombre de points fixes de  $\sigma$ . Calculer  $\mathbb{E}[X]$ .

**Exercice 5.** On considère une population de  $2^n$  vaches susceptibles, avec la probabilité  $p$ , d'être porteuses d'un virus donné. On dispose d'un test détectant de façon certaine ce virus dans le lait des vaches.

On fixe  $0 \leq k \leq n$ . On sépare les vaches en  $2^k$  groupes de  $2^{n-k}$  vaches. On mélange leur lait, on fait un test sur chacun des mélanges, puis on effectue un test sur chacune des vaches des groupes contaminés. On note  $Y$  le nombre de groupes malades et  $X$  le nombre total de tests effectués.

1. Exprimer  $X$  en fonction de  $Y$ ,  $k$  et  $n$ .
2. Déterminer la probabilité qu'un groupe donné soit malade.
3. Donner la loi de  $Y$  et son espérance.
4. En déduire  $\mathbb{E}[X]$ .
5. On suppose  $n = 10$  et  $p = 0.01$ . Déterminer la meilleure valeur de  $k$ .

**Exercice 6.** Une puce se déplace (uniquement vers l'avant) sur une bande numérotée par les entiers naturels et commence à la case 0. À chaque étape, elle fait un bond d'une case avec la probabilité  $p$  et de deux cases avec la probabilité  $q = 1 - p$ . On note  $X_n$  le numéro de la case où se trouve la puce après  $n$  bonds et  $Y_n$  le nombre de bonds d'une case effectués après  $n$  bonds.

1. Déterminer la loi de  $Y_n$ .
2. Exprimer  $X_n$  en fonction de  $Y_n$ .
3. En déduire  $\mathbb{E}[X_n]$ .

**Exercice 7.** Un questionnaire comporte 20 questions. Pour chaque question,  $k$  réponses sont possibles dont une seule est bonne. Chaque bonne réponse rapporte 1 point. Un candidat répond au hasard à toutes les questions.

1. Soit  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de points obtenus par le candidat. Déterminer la loi de  $X$ .
2. À chaque question, si le candidat s'est trompé, il a droit à une seconde chance et peut choisir une autre réponse parmi celles qui restent. Il gagne alors 0.5 point en cas de bonne réponse. Soit  $Y$  le nombre de demi-points obtenus, déterminer la loi de  $Y$ .
3. Déterminer  $k$  pour que la note moyenne soit 5/20.

**Exercice 8.** Soient  $N$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\llbracket 1, m \rrbracket$  et  $(X_1, \dots, X_m)$  des variables aléatoires à valeurs entières indépendantes entre elles et de  $N$  suivant toutes la même loi. On pose pour tout  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $S_j = \sum_{i=1}^j X_i$ . On pose enfin  $Z = \sum_{i=1}^N X_i$ . Déterminer  $\mathbb{E}[Z]$ .

Application : on tire un entier  $N$  au hasard et uniformément dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  puis on jette  $N$  fois une pièce équilibrée. Calculer l'espérance du nombre de piles obtenus.

**Exercice 9.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On suppose que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$ . Montrer que  $X$  et  $Y$  suivent les mêmes lois.