

Exercices MPSI — colle n° 24

Samuel Debray

Jeudi 12 mai 2022

Exercice 1. On dispose de $n + 1$ urnes $U_0, U_1, \dots, U_n$ où l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on réalise p tirages avec remise dans l'urne choisie.

1. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules blanches ?
2. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{G}$ un ensemble fixé de cardinal N et $\mathcal{M}$ une partie fixée de $\mathcal{G}$ de cardinal m . L'ensemble des parties de $\mathcal{G}$ est muni de la probabilité uniforme. On fixe $n \leq N$.

1. Soit $k \in \llbracket 0, \min(n, m) \rrbracket$. Quelle est la probabilité p_k qu'une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{G}$ de cardinal n intersecte $\mathcal{M}$ selon un ensemble de cardinal k ?
2. Le cardinal moyen de l'intersection d'une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{G}$ de cardinal n avec $\mathcal{M}$ est donc $\sum_{k=0}^{\min(n, m)} k p_k$. Calculer ce nombre moyen.
3. Un étang contient N grenouilles. On cherche à estimer N . Pour cela, on commence par pêcher m grenouilles que l'on marque puis que l'on rejette à l'eau. Quelques jours plus tard, on pêche n grenouilles. Montrer que l'on peut estimer N .

Exercice 3. On considère une urne contenant n boules numérotées. Les nombres inscrits sur les boules sont des réels deux à deux distincts sur lesquels on ne sait rien de plus. On réalise un tirage sans remise dans l'urne avec l'objectif de déterminer le maximum M des nombres inscrits sur les boules. Comme on n'a pas le temps de tirer toutes les boules (disons que n est trop grand), on opte pour la stratégie suivante : on choisit un entier $p \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, on tire p boules successivement et sans remise et on mémorise le maximum M_p que l'on a vu parmi ces p boules. On continue alors à tirer des boules mais on s'arrête dès que l'on a trouvé un nombre supérieur à M_p .

1. Quelle est la probabilité $P_{n,p}$ que l'on trouve ainsi le maximum M .
2. Si $n = 4$, quelle valeur de p a-t-on intérêt à choisir ?
3. Soit $\alpha \in]0, 1]$. On choisit p en fonction de n (on le notera donc p_n) de manière à ce que $\frac{p_n}{n} \rightarrow \alpha$ (α représente donc asymptotiquement la proportion de boules que l'on commence par tirer). Montrer que P_{n,p_n} tend vers $-\alpha \ln(\alpha)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
4. Quelle valeur de α a-t-on intérêt à choisir ?

Exercice 4. Un train contient n places numérotées et n voyageurs possèdent un billet. Le premier voyageur monte dans le train mais il a oublié son billet et se place donc au hasard. Puis chaque voyageur s'installe à sa place si elle est libre et choisit une place libre au hasard sinon. Quelle est la probabilité que la dernière personne se trouve à sa place ?

Exercice 5 (indicatrice d'EULER). On tire uniformément un entier de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour $p \leq n$ non nul, on note A_p l'évènement « le nombre tiré est divisible par p ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ lorsque $p \mid n$.
2. Montrer que si $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont des diviseurs premiers de n distincts, les évènements $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots, A_{p_n}$ sont indépendants.

3. Montrer que

$$\phi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

où ϕ est l'*indicatrice d'EULER*, qui associe à tout n le nombre d'entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ premiers avec n .

Exercice 6 (urne de POLYA). Une urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches. On effectue des tirages successifs d'une boule, en remettant après chaque tirage la boule tirée avec en plus $c > 0$ boules de la même couleur.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la deuxième est blanche ?
2. Notons $R_n^{b,r}$ (resp. $B_n^{b,r}$) l'évènement « la n -ième boule tirée est rouge (resp. blanche) ». On veut montrer que $\mathbb{P}(R_n^{b,r})$ ne dépend pas de n .
 - (a) Vérifier que $\mathbb{P}(R_2^{b,r}) = \mathbb{P}(R_1^{b,r})$.
 - (b) On suppose le résultat vrai au rang $n - 1$. Que valent $\mathbb{P}(R_n^{b,r} \mid R_1^{b,r})$ et $\mathbb{P}(R_n^{b,r} \mid B_1^{b,r})$?
 - (c) Conclure.

Exercice 7 (paradoxe des anniversaires). On considère une assemblée de n personnes.

1. On fixe une personne P de cette assemblée. Quelle est la probabilité qu'une personne de l'assemblée autre que P ait son anniversaire le même jour que P ? Pour quelle valeur de n cette probabilité est-elle au moins égale à $\frac{1}{2}$?
2. Quelle est la probabilité que deux personnes aient leur anniversaire le même jour ? Pour quelle valeur de n cette probabilité est-elle au moins égale à $\frac{1}{2}$?
3. Combien de personnes faut-il réunir pour que la probabilité que deux d'entre elles aient la même date d'anniversaire (jour et mois) soit supérieure à $\frac{1}{2}$?

Exercice 8 (problème des allumettes de BANACH). Un fumeur a dans chaque poche une boîte d'allumettes qui contient au départ N allumettes. Chaque fois qu'il veut fumer, il choisit une poche au hasard.

1. Calculer la probabilité $p(x)$ que, lorsque le fumeur se rend compte pour la première fois qu'une boîte est vide, l'autre boîte contienne exactement x allumettes.
2. Dans le cas $x = 0$ (qui correspond au problème historique) déterminer un équivalent de $p(x)$ lorsque N tend vers l'infini et interpréter, sachant qu'il y a environ cinquante allumettes dans une petite boîte standard.

Exercice 9 (problème de MONTY HALL). Vous participez à un jeu télévisé et êtes face à trois portes : derrière l'une se trouve une voiture et derrière les deux autres se trouvent des chèvres. Vous choisissez une porte (par exemple la n° 1) et le présentateur, qui sait ce qu'il y a derrière chaque porte, en ouvre une autre qui cache une chèvre (par exemple la n° 3). Il vous demande ensuite : « Voulez-vous changer pour la porte n° 2 ? ».

Est-il à votre avantage de changer de porte ?