

Exercices MPSI — colle n° 23

Samuel Debray

Jeudi 21 avril 2022

Exercice 1. Déterminer la nature de la série $\sum \left(\sqrt[3]{n^3 + n} - \sqrt[2]{n^2 + an + b} \right)$ en fonction de $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Pour $r \in \mathbb{N}$, on pose $S_r(x) = \sum_{n \geq r} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

1. Pour quelles valeurs de x réel la somme $S_r(x)$ est-elle définie ?
2. Calculer $(1-x)S_{r+1}$.
3. En déduire la valeur de $S_r(x)$.

Exercice 3 (critère de d'ALEMBERT). Soit u une suite strictement positive. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow a$. Montrer que si $a < 1$ alors $\sum u_n$ converge et si $a > 1$ alors $\sum u_n$ diverge. Montrer que si $a = 1$ on ne peut pas conclure.

Exercice 4. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^n k^{\frac{1}{k}} = n + \frac{1}{2} \ln^2(n) + \ell + o(1)$.

Exercice 5. Pour $n \geq 2$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

1. Montrer que $u_n \sim v_n$.
2. Montrer que $\sum u_n$ converge.
3. Montrer que $\sum v_n$ diverge.

Exercice 6. Soit u une suite positive décroissante tendant vers 0. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 7. Soit u une suite réelle positive et décroissante. Montrer que $\sum u_n$ converge ssi $\sum 2^n u_{2^n}$ converge. Appliquer ceci à $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$.

Exercice 8. Déterminer les suites réelles v telles que pour toute suite réelle positive u , $\sum u_n$ converge implique $\sum u_n v_n$ converge.

Exercice 9 (sommation des relations de comparaison). Soient u et v deux suites réelles à termes positifs tels que $u_n = o(v_n)$. Montrer que

- si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^\infty u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^\infty v_k\right)$,
- si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge et $\sum_{k=1}^n u_k = o\left(\sum_{k=1}^n v_k\right)$.

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) = \max\{p \in \mathcal{P} \mid p \mid n\}$. Montrer que $\sum \frac{1}{P(n)}$ converge.