

Exercices MPSI — colle n° 22

Samuel Debray

Jeudi 14 avril 2022

Exercice 1. De combien de façons différentes peut-on ranger les nombres de 1 à n si l'on veut que le produit de deux nombres successifs soit toujours pair ?

Exercice 2. Un domino est un rectangle constitué de deux carrés, chacun comportant entre 0 et 6 points.

1. Combien existe-t-il de domino ?
2. Combien de paires peut-on former avec des dominos ayant exactement un nombre en commun ?

Exercice 3. On dispose de trois urnes notées A, B, C et de six boules. On répartit les six boules dans les trois urnes. Une répartition est une liste ordonnée de trois nombres indiquant le nombre de boules contenues dans les urnes A, B, C. Dénombrer le nombre de partitions dans les cas suivants :

1. sans restriction,
2. l'urne A est vide,
3. l'urne A est la seule vide,
4. exactement une urne est vide,
5. aucune urne n'est vide,
6. au moins une urne est vide.

Exercice 4. Soit E un ensemble de cardinal $2n$. On appelle partition de E en paires tout ensemble de la forme $\{\{a_1, b_1\}, \dots, \{a_n, b_n\}\}$ avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i \neq b_i$ et $(\{a_1, b_1\}, \dots, \{a_n, b_n\})$ est une partition de E . Dénombrer les partitions de E en paires.

Exercice 5. Soit E de cardinal n . Dénombrer de deux manières les couples (a, A) avec $a \in E$ et $A \subseteq E$ tels que $a \notin A$ et en déduire $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Exercice 6. Dénombrer les involutions de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 7. 1. Dénombrer les applications $f: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$ strictement croissantes.

2. Dénombrer les applications $f: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, p \rrbracket$ croissantes.
3. En déduire le nombre de suites $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ telles que $a_1 + \dots + a_n \leq p$.
4. Même question avec la condition $a_1 + \dots + a_n = p$.

Exercice 8. On note

$$d_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \cdot \sigma(k) \neq k\}$$

le nombre de *dérangements* de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $d_0 = 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k}$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$.

Exercice 9 (mots de DYCK). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X = \{-1, 1\}^n$. À chaque suite $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, on associe la suite (s_0, \dots, s_n) avec $s_0 \in \mathbb{Z}$ et $s_k = s_{k-1} + x_k$. Cette suite détermine une ligne brisée déterminée par les points (k, s_k) . Cette ligne brisée relie $(0, s_0)$ à (n, s_n) .

1. On note p le nombre de 1 dans la suite $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$. Exprimer s_n en fonction de n , p et s_0 .
2. Étant donné $m \in \mathbb{N}$, combien existe-t-il de chemins tels que $s_n = m$?
3. On suppose $s_n \in \mathbb{N}$. Expliquer pourquoi il y a autant de chemins joignant $(0, -s_0)$ à (n, m) que de chemins joignant $(0, s_0)$ à (n, m) et coupant l'axe des abscisses.
4. En déduire le nombre de chemins joignant $(0, 1)$ à (n, m) dont tous les points sont d'ordonnées strictement positive.
5. Dénombrer le nombre de mots sur $\Sigma = \{(\cdot, \cdot)\}$ bien parenthésés.

Exercice 10. Dix personnes de moins de soixante ans sont dans une pièce (l'âge d'une personne est un nombre entier). Montrer que l'on peut constituer deux groupes disjoints de personnes tels que la somme des âges des membres du premier groupe est égale à la somme des âges des membres du second.