

# Exercices MPSI — colle n° 21

Samuel Debray

Jeudi 7 avril 2022

**Exercice 1.** Soit  $\lambda > 0$ . Étudier la suite définie par  $u_0 > 0$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{1+\lambda u_n}$ .

**Exercice 2.** Étudier les suites vérifiant  $u_{n+1} = \frac{1}{2} \sin(u_n) + 1$ .

**Exercice 3.** Le petit Alfred est amoureux de Béatrice et Christophe et son cœur balance entre les deux. Dans la cour de récréation, Béatrice et Christophe sont immobiles et Alfred fait la moitié du chemin qui le sépare de Béatrice, puis se ravise et fait la moitié du chemin qui le sépare de Christophe, puis se ravise etc. Décrire le comportement asymptotique d'Alfred.

**Exercice 4.** Montrer que la suite  $u_0 = 1, u_1 = 2$  et  $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$  est bien définie et la déterminer.

**Exercice 5.** Déterminer les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -1 \end{cases}$  et  $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n + n \\ v_{n+1} = 2u_n - v_n - 2 \end{cases}$ .

**Exercice 6.** Déterminer un équivalent de la suite  $u$  définie par  $u_0 = 1, u_1 = -1$  et  $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n + 1$ .

**Exercice 7.** Soit  $u$  une suite définie par  $u_0 > 0$  et  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ .

1. Étudier la suite  $u$ .
2. Déterminer  $\alpha > 0$  tel que  $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et en déduire un équivalent de  $u_n$ .

**Exercice 8.** Déterminer la suite définie par  $u_0 = a > 0, u_1 = b > 0$  et  $u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2$ . À quelle condition  $u$  converge-t-elle ?

**Exercice 9.** Établir

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}.$$

**Exercice 10.** Soit  $u$  une suite de réels positifs telle que  $\forall n \in \mathbb{N} \cdot u_{n+2} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$ . Montrer que  $u$  converge.