

Exercices MPSI — colle n° 20

Samuel Debray

Jeudi 31 mars 2022

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré 2 tel que $P(A) = 0$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire les suites définies par $\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + v_n \end{cases}$.

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé.

1. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $x \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que $a(x) = \lambda x$.
2. En déduire une matrice P inversible telle que PAP^{-1} est diagonale.
3. Application : calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.
4. Application : résoudre le système différentiel $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 6y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$.

Exercice 3. Soit $J = (1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Calculer J^p pour $p \in \mathbb{N}$.
2. J est-elle inversible ?
3. Soit $A = (a_{i,j})$ avec $a_{i,i} = 0$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .

Exercice 4. Soit N une matrice nilpotente. On pose $A = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)N^k$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse en fonction de N .

Exercice 5. Une matrice est dite *positive* ssi tous ses coefficients sont positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \wedge A^{-1} \geq 0 \iff (\forall X \in \mathbb{R}^n \cdot AX \geq 0 \implies X \geq 0).$$

Exercice 6. Soit E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{rg}(u) = 1$ et $\text{tr}(u) = 1$. Montrer que u est un projecteur.

Exercice 7. Montrer que matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle est nilpotente. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle.

Exercice 8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \min(i,j)$. A est-elle inversible ? Calculer A^{-1} le cas échéant.

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi: \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AXA \end{cases}$. Calculer $\text{rg}(\varphi)$ en fonction de $\text{rg}(A)$.

Exercice 10. Soit $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ non constante telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \cdot f(AB) = f(A)f(B).$$

On veut montrer que A est inversible ssi $f(A) \neq 0$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(I_n)$.
2. Montrer que si A est inversible alors $f(A) \neq 0$.
3. Montrer que si A et B on même rang alors $(f(A) \neq 0 \iff f(B) \neq 0)$.
4. Montrer que pour tout $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, il existe une matrice A de rang r et nilpotente. Conclure.

Exercice 11. Quel est le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes ?

Exercice 12 (lemme d'HADAMARD). Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \cdot |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.