

# Exercices MPSI — colle n° 2

Samuel Debray

Vendredi 1 octobre 2021

**Exercice 1.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 = \bar{z}$ .

**Exercice 2.** Soient  $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\sum_{k=1}^n \frac{e^{i\theta_k}}{2^{k-1}} \neq 0$ .

**Exercice 3.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\omega \in \mathbb{U}_n$ . Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$ .

**Exercice 4.** Soient  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$  et  $x = \omega + \omega^{-1}$ . Calculer  $x^2 + x - 1$  et en déduire  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ .

**Exercice 5.** Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . Montrer que

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2 \iff z \in \mathcal{C}(i, \sqrt{2}) \cup \mathcal{C}(-i, \sqrt{2}).$$

**Exercice 6.** Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points d'affixe respective  $a, b, c$  et  $d$ . Montrer que  $ABCD$  est un rectangle ssi  $a + c = b + d$  et  $\frac{d-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$ .

**Exercice 7.** Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On considère la proposition  $p$  suivante :

$$p \equiv \exists t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \cdot f(x) < t.$$

1. Écrire la négation de  $p$ .
2. Donner un exemple de fonction  $f$  qui vérifie  $p$  et un exemple de fonction  $f$  qui ne vérifie pas  $p$ .
3. Pour les propositions suivantes, dire si elles sont équivalentes à  $p$ , toujours vraies, toujours fausses, ou si l'on ne peut rien dire.
  - $p_1 \equiv \exists x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} \cdot f(t) < x$  ;
  - $p_2 \equiv \exists t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \cdot f(t) < x$  ;
  - $p_3 \equiv \forall t \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \cdot f(x) < t$  ;
  - $p_4 \equiv \forall t \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \cdot f(t) < x$ .

**Exercice 8.** Soit  $a \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \implies a = 0$ .

**Exercice 9** (principe des tiroirs). Montrer que si l'on range  $n + 1$  paires de chaussettes dans  $n$  tiroirs distincts, alors il y a un tiroir qui contiendra au moins deux paires de chaussettes.

**Exercice 10.** Démontrer que tout entier  $n \geq 1$  peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.

**Exercice 11.** Déterminer toutes les fonctions  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables et telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

**Exercice 12.** Soient  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ . Montrer que

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| \leq 2M$$

où  $M = \max\{|\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \dots + \varepsilon_n z_n|, (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n\}$ .