

Exercices MPSI — colle n° 19

Samuel Debray

Jeudi 24 mars 2022

Exercice 1. Déterminer explicitement $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [-\alpha, \alpha], \left| \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq 10^{-7}$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P = (X^2 - 1)^n$.

1. Montrer que si $k < n$ alors $P^{(k)}(1) = P^{(k)}(-1) = 0$.
2. Montrer que $P^{(n)}$ est scindé à racines simples dans $] -1, 1[$.

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f(0) = 0$. Déterminer la limite de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f'' est bornée et f admet une limite finie en $+\infty$. Montrer que $\lim_{+\infty} f' = 0$.

Exercice 5. Soit $f: x \mapsto e^{-x^2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout réel x , $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que P_n est scindé à racines simples sur \mathbb{R} .

Exercice 6 (inégalité de JENSEN). Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels positifs tels de $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Montrer que

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

Exercice 7 (inégalité de HÖLDER). 1. Soient p et q des réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$, $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

2. Soient (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) des réels positifs. Montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercice 8. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $k \leq 2^n$, on a $f\left(\frac{kx+(2^n-k)y}{2^n}\right) \leq \frac{kf(x)+(2^n-k)f(y)}{2^n}$.
2. Montrer que f est convexe.

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction convexe non constante.

1. Montrer que f n'est pas majorée.
2. Montrer que f' a une limite finie ou infinie en $+\infty$.
3. On suppose que $\lim_{+\infty}$ est finie égale à ℓ . Montrer que $x \mapsto f(x) - \ell x$ a une limite finie ou infinie en $+\infty$. Illustrer les différents cas de figure.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré 2 tel que $P(A) = 0$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire les suites définies par $\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + v_n \end{cases}$.

Exercice 11. Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé.

1. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe $x \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que $a(x) = \lambda x$.
2. En déduire une matrice P inversible telle que PAP^{-1} est diagonale.
3. Application : calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.
4. Application : résoudre le système différentiel $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 6y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$.