

Exercices MPSI — colle n° 17

Samuel Debray

Jeudi 10 mars 2022

Exercice 1 (lemme de factorisation à droite). Soient E, F, G des \mathbb{K} -ev, $f \in \mathcal{L}(E, G)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $f = h \circ g$ ssi $\ker(g) \subseteq \ker(f)$.

Application : retrouver le fait que deux formes linéaires de même noyau sont proportionnelles.

Exercice 2. Soient E un \mathbb{K} -ev et $u, v, w \in E^*$. Déterminer une CNS pour que $w \in \text{vect}(u, v)$.

Exercice 3. Donner un exemple de deux fonctions continues f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que (f, g) est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Exercice 4. 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n: x \mapsto \sin^n(x)$. Montrer que (f_0, \dots, f_n) est libre.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n: x \mapsto \sin(nx)$. Montrer que (f_1, \dots, f_n) est libre.

Exercice 5. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n et F un sev de E différent de E . Soient (e_1, \dots, e_k) une base de F et $e_{k+1} \in E \setminus F$.

1. Montrer que (e_1, \dots, e_{k+1}) est libre.

2. On pose $f_i = e_i + e_{k+1}$ pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et $f_{k+1} = e_{k+1}$. Montrer que (f_1, \dots, f_{k+1}) est une famille libre de vecteurs de $E \setminus F$.

3. Montrer qu'il existe une base de E composée de vecteurs n'appartenant pas à F .

Exercice 6. Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{rg}(g \circ f) \geq \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - n$.

Exercice 7. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ non inversible.

1. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $f \circ g = g \circ f = 0$.

2. On pose $X := \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f = 0\}$. Montrer que X est un ev et déterminer sa dimension.

Exercice 8. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ laissant stable tout hyperplan de E . Montrer que f est une homothétie.

Exercice 9. Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n . Soit (x_1, \dots, x_p) une famille de vecteurs de E . Montrer qu'elle est libre ssi pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, il existe $u \in E^*$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u(x_i) = \lambda_i$.

Exercice 10 (noyaux itérés). Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\ker(f^i) \subseteq \ker(f^{i+1})$.

2. Montrer qu'il existe $r \leq n$ minimal tel que $\forall i \geq r, \ker(f^i) = \ker(f^{i+1})$. r est appelé *indice* de f .

3. Montrer que $E = \ker(f^r) \oplus \text{Im}(f^r)$.