

Exercices MPSI — colle n° 15

Samuel Debray

Jeudi 10 février 2022

Exercice 1. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C} \cdot P(z) = \bar{z}$.

Exercice 2. Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \cdot P(x) \geq 0 \iff \exists(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2 \cdot P = A^2 + B^2.$$

Exercice 4. Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si ξ est une racine de P alors $|\xi| \leq 1 + \max_{0 \leq k \leq n-1} |a_k|$.

Exercice 5. Déterminer les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Exercice 6. Soient $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Exercice 7. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{N}$, $a \mid b \iff X^a - 1 \mid X^b - 1$.

Exercice 8. 1. Montrer que $a = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est racine d'un polynôme de degré trois à coefficients dans \mathbb{Z} .
2. Justifier que a est irrationnel.

Exercice 9. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts deux-à-deux.

1. Calculer $\sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$.
2. On pose $A(X) = \prod_{j=1}^n (X - a_j)$. Calculer $\sum_{i=1}^n \frac{1}{A'(a_i)}$.

Exercice 10. Déterminer la droite deux fois tangente à la courbe $y = x^4 + 2x^3 + 1$.

Exercice 11. Soient $x, y, z \in \mathbb{C}^*$ tels que $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Montrer que $|x| = |y| = |z|$.

Exercice 12. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels distincts et a_1, \dots, a_n des réels quelconques. Montrer que si pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^k = 0$ alors $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Application : montrer que si $\forall x \in \mathbb{R} \cdot a_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + a_n e^{\lambda_n x} = 0$ alors $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Exercice 13. Déterminer les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$ tels que $xyz = x + y + z = 1$.