Exercices MPSI — colle n° 14

Samuel Debray

Vendredi 28 janvier 2022

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et F un sev de E . Déterminer le sous-espace engendré par le complémentaire de F .

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et E_1, E_2, E_3 trois sev de E . Montrer que si $E_1 \subseteq E_2 \cup E_3$ alors $E_1 \subseteq E_2$ ou $E_1 \subseteq E_3$.

Exercice 3. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et F un sev de E . Montrer que si G et H sont deux supplémentaires de F dans E alors ils sont isomorphes.

Exercice 4. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker(f) \cap \text{Im}(f) = f(\ker(f \circ f))$.

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(g)$.

Exercice 6. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = f^2 + f$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercice 7. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

1. $\ker(g \circ f) = \ker(f) \iff \text{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0_E\}$.
2. $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g) \iff \text{Im}(f) + \ker(g) = E$.

Exercice 8. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et $x, y \in E$. Montrer que $x \neq y$ ssi il existe $u \in E^*$ telle que $u(x) \neq u(y)$.

Exercice 9. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si f laisse stable toutes les droites de E alors f est une homothétie.
2. Montrer que si f commute avec tous les automorphismes alors f est une homothétie.

Exercice 10 (théorème du rang). 1. Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note S un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E . Montrer que f induit un isomorphisme $\hat{f} \in \mathcal{L}(S, f(E))$.

2. Soient E, F, G des $\mathbb{K}$ -ev, $f \in \mathcal{L}(E, G)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $f = h \circ g$ ssi $\ker(g) \subseteq \ker(f)$.
3. Retrouver le fait que deux formes linéaires de même noyau sont proportionnelle.