

Exercices MPSI — colle n° 12

Samuel Debray

Vendredi 14 janvier 2022

Exercice 1 (centralisateur). Soient G un groupe et S une partie non vide de G . On pose

$$C_G(S) := \{g \in G \mid \forall x \in S \cdot gx = xg\}$$

le *centralisateur* de S dans G .

1. Montrer que $C_G(S)$ est un sous-groupe de G .
2. Montrer que $\bigcap_{x \in G} C_G(\{x\}) = Z(G)$ où $Z(G) := C_G(G)$ est le *centre* de G .
3. Soient $x \in G$ et $H = C_G(\{x\})$. Montrer que $x \in Z(H)$.

Exercice 2. Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini. Montrer que si G est d'ordre pair, alors il existe $x \in G$ tel que $x \neq e_G$ et $x = x^{-1}$.

Exercice 3 (théorème de LAGRANGE). Soient $(G, \cdot)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G .

1. Montrer que la relation $\sim_H$ définie sur G par $x \sim_H y \iff y^{-1}x \in H$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que les classes d'équivalence de $\sim_H$ sont de la forme $gH := \{gh, h \in H\}$ pour $g \in G$.
3. Soit $g \in G$, montrer que gH et H ont le même ordre.
4. En déduire le théorème de LAGRANGE : l'ordre de H divise l'ordre de G .

Exercice 4. Déterminer tous les homomorphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même. Lesquels sont injectifs? surjectifs?

Exercice 5. Soient $(G, \cdot)$ un groupe fini et $f: (G, \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ un homomorphisme non constant. Calculer $\sum_{x \in G} f(x)$.

Exercice 6 (premier théorème d'isomorphisme). Soit $f: (G, \cdot) \rightarrow (G', \cdot)$ un homomorphisme.

1. Montrer que la relation $\sim_G$ définie sur G par $x \sim_G y \iff y^{-1}x \in \ker(f)$ est une relation d'équivalence. On admet qu'il en va de même pour $\sim_D$ définie par $x \sim_D y \iff xy^{-1} \in \ker(f)$.
2. Montrer que les classes d'équivalence de $\sim_G$ (resp. $\sim_D$) sont de la forme $x \ker(f)$ (resp. $\ker(f)x$).
3. Montrer que pour tout $x \in G$, $x \ker(f) = \ker(f)x$.
4. Montrer que $(G/\sim_G, *)$ où $x \ker(f) * y \ker(f) := (x \cdot y) \ker(f)$ est un groupe. Il faut en particulier montrer que $*$ est bien définie. On note ce groupe $G/\ker(f)$.
5. Montrer que la fonction $\hat{f}: G/\ker(f) \rightarrow f(G)$ définie pour tout $x \ker(f) \in G/\ker(f)$ par $\hat{f}(x \ker(f)) = f(x)$ est un isomorphisme.

Exercice 7 (anneaux de BOOLE). On dit qu'un anneau A est de BOOLE ssi $\forall x \in A, x^2 = x$. Soit A un tel anneau.

1. Montrer que $\forall x \in A, x = -x$.
2. Montrer que A est commutatif.

Exercice 8 (entiers de GAUSS). Soit $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + \sqrt{2}b, a, b \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des entiers de GAUSS.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un anneau.
2. On note $N(a + b\sqrt{2}) := a^2 - 2b^2$. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
3. En déduire que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \mid N(x) = \pm 1\}$.

Exercice 9. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif. On dit qu'une partie I de A est un *idéal* de A ssi

- $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$;
 - I est multiplicativement permis : $\forall x \in I, \forall a \in A \cdot ax \in I$.
1. Soit $a \in A$. Montrer que $aA := \{ax, x \in A\}$ est un idéal de A .
 2. Montrer que si les idéaux de A sont triviaux (i.e. égaux à $\{0\}$ ou A) alors A est un corps.
 3. Montrer que si A est intègre et n'admet qu'un nombre fini d'idéaux alors A est un corps.

Exercice 10 (rêve du bizuth). Soit $(K, +, \cdot)$ un corps.

1. Montrer que

$$\Phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & K \\ n & \longmapsto & n \times 1 \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux.

2. On suppose Φ non injective. Montrer qu'il existe un nombre premier p tel que $\ker \Phi = p\mathbb{Z}$. On dit alors que K est de *caractéristique* p .
3. Supposons que K soit de caractéristique p . Démontrer la formule *rêve du bizuth* :

$$\forall x, y \in K, (x + y)^p = x^p + y^p.$$