

Exercices MPSI — colle n° 11

Samuel Debray

Vendredi 7 janvier 2022

Exercice 1. Soient u et v deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \cdot u_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que u et v convergent et déterminer leur limite.

Exercice 2. Soit u une suite complexe telle que u^2 et u^3 convergent. Montrer que u converge.

Exercice 3. Soit u une suite complexe. Montrer que si $u_n \rightarrow 0$ alors $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k u_k \rightarrow 0$.

Exercice 4. Que peut-on dire d'une suite u telle que $((-1)^n u_n)$ converge ?

Exercice 5. On pose, pour $n \geq 2$ $P_n : x \mapsto x^n - nx + 1$.

1. Montrer que P_n admet une plus petite racine positive u_n .
2. Calculer $P_n\left(\frac{1}{n}\right)$. En encadrant u_n , montrer que la suite u converge.

Exercice 6. Soit u une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \cdot u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. On admet que u diverge vers $+\infty$. Déterminer $\alpha > 0$ tel que $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et en déduire un équivalent de u_n .

Exercice 7 (centralisateur). Soient G un groupe et S une partie non vide de G . On pose

$$C_G(S) := \{g \in G \mid \forall x \in S \cdot gx = xg\}$$

le *centralisateur* de S dans G .

1. Montrer que $C_G(S)$ est un sous-groupe de G .
2. Montrer que $\bigcap_{x \in G} C_G(\{x\}) = Z(G)$ où $Z(G) := C_G(G)$ est le *centre* de G .
3. Soient $x \in G$ et $H = C_G(\{x\})$. Montrer que $x \in Z(H)$.

Exercice 8 (théorème de LAGRANGE). Soient (G, \cdot) un groupe fini et H un sous-groupe de G .

1. Montrer que la relation \sim_H définie sur G par $x \sim_H y \iff y^{-1}x \in H$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que les classes d'équivalence de \sim_H sont de la forme $gH := \{gh, h \in H\}$ pour $g \in G$.
3. Soit $g \in G$, montrer que gH et H ont le même ordre.
4. En déduire le théorème de LAGRANGE : l'ordre de H divise l'ordre de G .

Exercice 9. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif. On dit qu'une partie I de A est un *idéal* de A ssi

- $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$;
- I est multiplicativement permis : $\forall x \in I, \forall a \in A \cdot ax \in I$.

1. Soit $a \in A$. Montrer que $aA := \{ax, x \in A\}$ est un idéal de A .
2. Montrer que si les idéaux de A sont triviaux (i.e. égaux à $\{0\}$ ou A) alors A est un corps.