

# Exercices MPSI — colle n° 10

Samuel Debray

Vendredi 17 décembre 2021

**Exercice 1.** Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles telles que  $(u_n + v_n)$  et  $(u_n - v_n)$  convergent. Montrer que  $u$  et  $v$  convergent.

**Exercice 2.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $u$  et  $v$  deux suites réelles telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq a$ ,  $v_n \leq b$  et  $u_n + v_n \rightarrow a + b$ . Montrer que  $u_n \rightarrow a$  et  $v_n \rightarrow b$ .

**Exercice 3.** Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles convergentes, étudier la limite de  $(\max(u_n, v_n))$ .

**Exercice 4.** Soit  $u$  une suite de réels strictement positifs telle que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$ . Que dire de la convergence de  $u$  en fonction des valeurs de  $\ell$  ?

**Exercice 5.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$  et  $S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ .

1. Déterminer la limite de  $S$ .
2. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, S'_{2n} = S_n$ . En déduire la limite de  $S'$ .

**Exercice 6.** Déterminer la limite de  $u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1}$ .

**Exercice 7.** Soit  $u$  une suite croissante de limite  $\ell$ . On pose  $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$ .

1. Montrer que  $v$  est croissante.
2. Établir  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$ .
3. En déduire que  $v_n \rightarrow \ell$ .

**Exercice 8.** Soit  $u$  une suite réelle convergente. Étudier la limite de la suite  $v$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = \sup_{p \geq n} u_p$ .

**Exercice 9.** 1. Montrer que  $H_n \sim \ln(n)$ .

2. Soit  $u$  une suite telle que  $n(u_{n+1} - u_n) \rightarrow 1$ . Montrer que  $u_n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 10.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  et  $S'_n = S_n + \frac{1}{n}$ . Montrer que  $S$  et  $S'$  sont adjacentes.

**Exercice 11** (critère spécial des séries alternées). Soit  $u$  une suite de réels décroissante telle que  $u_n \rightarrow 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ . Montrer que  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  convergent et en déduire que  $S$  converge.

**Exercice 12.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!}$  et  $b_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ .

1. Montrer que  $a$  et  $b$  sont adjacentes et que leur monotonie est stricte.
2. On admet que  $a$  et  $b$  convergent vers  $e$ . Montrer par l'absurde que  $e \notin \mathbb{Q}$ .

**Exercice 13.** Soit  $u$  une suite réelle croissante telle que  $(u_{2n})$  converge. Montrer que  $u$  converge.

**Exercice 14.** Soit  $u$  une suite réelle telle que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}.$$

Montrer que  $u$  converge vers 0.

**Exercice 15.** Soit  $u$  une suite réelle telle que  $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$  et  $u_n \rightarrow +\infty$ . Montrer qu'il existe une extraction  $\varphi$  telle que  $u_{\varphi(n)} - n \rightarrow 0$ .