

# Exercices MPSI — colle n° 1

Samuel Debray

Vendredi 24 septembre 2021

**Exercice 1.** Calculer de deux façons  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ .

**Exercice 2.** Soient  $n, m \in \mathbb{N}$  tels que  $n \leq m$ .

1. Que représente sur le triangle de PASCAL la somme  $\sum_{k=n}^m \binom{k}{n}$  ?
2. Conjecturer sa valeur puis faire une preuve par récurrence.
3. Retrouver le résultat en faisant apparaître une somme télescopique.

**Exercice 3** (suites arithmético-géométriques). Soient  $a, b \in \mathbb{C}$  avec  $a \neq 1$  et  $a \neq 0$ . Calculer la suite  $u$  définie par  $u_0 \in \mathbb{C}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = au_n + b$ .

**Exercice 4** (autour de  $\sum_{k=1}^n k^p$ ). On se propose de donner deux méthodes pour calculer  $S_n^p := \sum_{k=1}^n k^p$  pour  $n, p \in \mathbb{N}^*$ . On commencera par les illustrer sur  $S_n^3$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé.

1. (a) Déterminer un polynôme  $P$  de degré 4 tel que  $P(X+1) - P(X) = X^3$ .  
(b) Calculer  $S_n^3$  en fonction de  $n$ .
2. (a) Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , développer  $(k+1)^4 - k^4$ .  
(b) Retrouver l'expression de  $S_n^3$  en fonction de  $n$  précédemment obtenue.
3. Généraliser ces deux méthodes. Quels sont leurs avantages et leurs inconvénients ?

**Exercice 5.** Résoudre l'équation  $\cos(x) + \sin(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ .

**Exercice 6.** Résoudre les équations  $\cos(5x) + 2\cos(3x) + 3\cos(x) = 0$  et  $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$ .

**Exercice 7.** Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^{k+1}}\right)$ .

**Exercice 8.** Calculer  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ .

**Exercice 9.** Soient  $a, b \in \mathbb{U}$  tels que  $ab \neq -1$ . Montrer que  $\frac{a+b}{1+ab}$  est réel.

**Exercice 10.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z + \frac{1}{\bar{z}} = 1$ .

**Exercice 11.** Soient  $a, b \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$ . Interpréter géométriquement.