

Exercices colle n° 8

Samuel Debray

Mercredi 25 et jeudi 26 novembre 2020

Questions de cours

Question de cours 1. Étudier les limites de $f: x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$ aux bornes de son domaine.

Question de cours 2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Étudier la dérivabilité et établir l'expression de $h'(x)$ et $h''(x)$ pour $h: x \mapsto f(\ln(x))$.

Question de cours 3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}$. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$? Donner une allure du graphe de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$.

Question de cours 4. Donner les asymptotes de la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto x + \frac{1}{x-5}$. En déduire une allure approximative de $\mathcal{C}_f$.

Exercices

Difficulté faible

Exercice 1. Étudier et représenter $f: x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$.

Exercice 2. Étudier et représenter $f: x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 2}{2e^x - 1}\right)$.

Exercice 3. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} \ln^3(x)}{x^4} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln^3(x^3) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x \ln^3(-x).$$

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x - \alpha}.$$

Difficulté moyenne

Exercice 5. Rechercher les asymptotes à la $\mathcal{C}_f$ courbe représentative de $f: \frac{(x+1)\ln(x+1)}{\ln(x)}$ et en déduire l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 6. Déterminer des réels a et b tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax + b - \sqrt{x^2 + 4x} = 0$. Qu'en déduire sur la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x}$?

Exercice 7. Étudier et représenter $f: x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

Exercice 8. Étudier et représenter $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 4} - 3x$.

Exercice 9. Étudier et représenter $f: x \mapsto \frac{x}{4} + \frac{1}{x^2}$.

Exercice 10. Étudier et représenter $f: x \mapsto \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$.

Exercice 11. Étudier et représenter $f: x \mapsto \ln(2x^3 - 3x^2 + 1)$.

Plus difficile

Exercice 12. Soit $f: x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{x-2}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer a , b et c pour que $\mathcal{C}_f$ vérifie les propriétés suivantes :
 - $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(0; 5)$,
 - la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est parallèle à Ox ,
 - la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 1 a pour pente -3 .
2. Étudier et représenter la fonction f ainsi obtenue.

Exercice 13. À tout réel a on associe la fonction $f_a: x \mapsto \ln(x^2 - a)$. On note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de f_a dans un repère orthonormé.

1. Étudier f_a et déterminer les solutions l'équation $f_a(x) = 0$.
2. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_0$ est asymptote à $\mathcal{C}_a$ en $+\infty$ et $-\infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que par tout point du plan il passe une et une seule courbe $\mathcal{C}_a$.