

Exercices colle n° 7

Samuel Debray

Mercredi 18 et jeudi 19 novembre 2020

Questions de cours

Question de cours 1. Soient $f = \ln$ et $g: x \mapsto -x^2$. Déterminer le domaine de définition de des fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$ et préciser leurs expressions si elles existent.

Question de cours 2. Déterminer le domaine de dérivabilité ainsi que l'expression de la dérivée de $h: x \mapsto x^2 \sin^5(3x)$.

Question de cours 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, retrouver la dérivée de $x \mapsto x^n$ à l'aide d'un taux d'accroissement.

Question de cours 4. Déterminer le domaine de dérivabilité et les variations de $f: x \mapsto (1+x)\sqrt{1-x^2}$.

Question de cours 5. Déterminer le domaine de dérivabilité et le comportement au voisinage de -1 et 1 de $f: x \mapsto (1+x)\sqrt{1-x^2}$.

Question de cours 6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Exercices

Difficulté faible

Exercice 1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que si f est paire alors f' est impaire et que si f est impaire alors f' est paire.

Exercice 2. Étudier $f: x \mapsto 2x + \ln(x+1) - \frac{1}{x}$.

Exercice 3. Étudier $f: x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

Exercice 4. Étudier $f: x \mapsto x \exp(-x^2)$.

Difficulté moyenne

Exercice 5. On dit qu'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est k -lipschitzienne ssi $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

1. Montrer que toute fonction lipschitzienne est continue.

2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f est lipschitzienne alors f' est bornée.

Exercice 6. Déterminer des réels a et b tels que $\lim_{x \rightarrow +\infty} ax + b - \sqrt{x^2 + 4x} = 0$. Qu'en déduire sur la courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x}$.

Exercice 7. Étudier $f: x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$.

Exercice 8. Soit $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 4} - 3x$. La courbe représentative de f admet-elle des asymptotes ?

Exercice 9. Étudier $f: x \mapsto \ln\left(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}\right)$ (parité, périodicité, domaines de définition et de dérivabilité, dérivée, variations, comportement aux bords du domaine).

Plus difficile

Exercice 10. Soient I et J deux parties de \mathbb{R} . Soit une fonction $f: I \rightarrow J$ bijective, c'est-à-dire telle qu'il existe $f^{-1}: J \rightarrow I$ telle que $f \circ f^{-1} = \text{id}_J$ et $f^{-1} \circ f = \text{id}_I$.

1. Montrer que $f(I) = J$ et $f^{-1}(J) = I$.
2. Montrer que si f est impaire alors f^{-1} aussi.

Exercice 11. Montrer que toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 12. 1. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $a < q < b$.
2. En déduire que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.