

Exercices colle n° 6

Samuel Debray

Jeudi 12 et vendredi 13 novembre 2020

Questions de cours

Question de cours 1. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ ne sont pas dérivables en 0.

Question de cours 2. Étudier le domaine de définition et les limites aux bornes de ce domaine de $f: x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$.

Question de cours 3. Étudier le domaine de dérivabilité et étudier les variations de $f: x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$.

Question de cours 4. Étudier sur $\mathbb{R}$ les variations de $g: x \mapsto \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et justifier que sa courbe représentative possède deux asymptotes.

Question de cours 5. Montrer que pour tous réels x et y , on a $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$ et $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.

Exercices

Difficulté faible

Exercice 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

Exercice 2. Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

Exercice 3. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

Difficulté moyenne

Exercice 4. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x < y$, on a $\frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < \frac{x+y}{2}$.

Exercice 5. Résoudre l'équation $2x \ln(x) + 3(x-1) = 0$.

On admettra que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$.

Exercice 6. Discuter, en fonction du paramètre réel k , de la position relative de la courbe $\mathcal{C}: y = \ln(1+x)$ par rapport à la droite $\mathcal{D}_k: y = kx$.

Exercice 7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Exercice 8. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 9. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$.

Plus difficile

Exercice 10. Montrer que, pour tout $x \geq e^2$, on a $\sqrt{x}^{\sqrt{x+1}} > \sqrt{x+1}^{\sqrt{x}}$.

Exercice 11. Étudier la fonction $f: x \mapsto \max\left(\frac{x^2-5x+5}{x-5}, x^2-6x-1\right)$.

Exercice 12. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ pour $n \geq 2$.