

Exercices colle n° 5

Samuel Debray

Mercredi 4 novembre 2020

Questions de cours

Question de cours 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, \pi[$ l'inéquation $\sin^2(4x) < \frac{3}{4}$.

Question de cours 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) \geq \sqrt{2}$ et représenter les solutions sur le cercle trigo.

Question de cours 3. Retrouver les formules $\cos(a)\cos(b) = \dots$ et $\cos(p) + \cos(q) = \dots$ en utilisant les formules $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.

Question de cours 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ puis sur $[0, 2\pi[$ l'inéquation $2\cos^2(x) + \cos(x) > 1$.

Question de cours 5. Donner et justifier le tableau de variation (avec limites) des fonctions puissances $x \mapsto x^n$ avec $n \geq 2$. En déduire graphiquement le nombre de solutions de $x^n = a$ en fonction des valeurs de n et de $a \in \mathbb{R}$.

Exercices

Difficulté faible

Exercice 1. Simplifier $\sum_{k=-n}^n \sin(k)$ et $\sum_{k=-n}^n k \cos(k)$.

Exercice 2. Simplifier $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x)$ et déduire la dérivée n -ième.

Exercice 3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1 + x$.

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) = \sqrt{2}$.

Difficulté moyenne

Exercice 5. Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Exercice 6. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^{k+1}}\right)$.

Exercice 7. Résoudre $\cos(x) + \sin(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On admettra que $\cos(x) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Exercice 8. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x < y$ on a $\frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)} < \frac{x+y}{2}$.

Plus difficile

Exercice 9. Résoudre $\cos(5x) + 2\cos(3x) + 3\cos(x) = 0$.

Exercice 10. Résoudre $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$.

Exercice 11. Étudier $f: x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \sin(x)$. On admettra que $\cos(x) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$.