

Exercices colle n° 30

Samuel Debray

Mardi 1 et mercredi 2 juin 2021

Questions de cours

Question de cours 1. Soit (P_n) la suite de polynômes définie par $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = (2n+1)XP_n - (X^2+1)P'_n$. Calculer P_1 , P_2 et P_3 . Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .

Question de cours 2. Trouver le reste de la division euclidienne de $A = X^{50}$ par $B = X^2 - 3X + 2$.

Question de cours 3. Soit $P = X^4 + X^3 - 10X^2 + 2X - 24$. Vérifier que $\sqrt{2}i$ est racine de P puis en déduire toutes les racines de P . Donner les formes factorisées de P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Question de cours 4. Décomposer $P = X^6 - 8$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Question de cours 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivée n -ième du polynôme $P = X^2(1+X)^n$.

Question de cours 6. Soit le polynôme $P = X^4 - 7X^3 + 15X^2 - 13X + 4$. Déterminer une racine évidente de P . Quelle est la multiplicité de cette racine? En déduire toutes les racines de P .

Question de cours 7. Déterminer le degré, le coefficient dominant et les racines complexes de $Q = (X+1)^n - (X-1)^n$.

Exercices

Difficulté faible

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ les équations $P'^2 = 4P$ et $P'P'' = 18P$.

Exercice 2 (polynômes de TCHEBYCHEV). Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

1. Calculer le degré et le coefficient dominant de T_n .
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$.
3. Montrer que $\forall n, m \in \mathbb{N}, T_n \circ T_m = T_m \circ T_n$.

Exercice 3 (polynômes de LAGRANGE). Soient $x_1, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ distincts deux-à-deux. Soient $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$.

1. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer un polynôme $L_i \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$ si $j \neq i$.
2. En déduire un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i$.
3. Montrer qu'un tel polynôme est unique.

Difficulté moyenne

Exercice 4. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 3 divisibles par $X - 1$ et tels que les restes des divisions euclidiennes de P par $X - 2$, $X - 3$ et $X - 4$ soient égaux.

Exercice 5. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \bar{z}$.

Exercice 6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 2$. Montrer que si P est scindé alors P' aussi.

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 8. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P' \mid P$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(X) = \frac{1}{n}(X - \alpha)P'(X)$.
2. En déduire la forme de P .

Exercice 9. Soit $P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$.

1. Factoriser le polynôme P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit α une racine de P . On pose $y = \alpha + \alpha^{-1}$.
 - (a) Déterminer une équation du second degré dont y est solution.
 - (b) En déduire les valeurs possibles de α .
3. En déduire enfin les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 10. Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$ de degré n . Montrer que si α est une racine de P alors $|\alpha| \leq 1 + \frac{\max_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} |a_i|}{|a_n|}$.

Exercice 11. Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$.

Plus difficile

Exercice 12. Déterminer les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{U}^3$ tels que $xyz = x + y + z = 1$.

Exercice 13. Soient $x, y, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tels que $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Montrer que $|x| = |y| = |z|$.