

Exercices colle n° 28

Samuel Debray

Mardi 18 et mercredi 19 mai 2021

Questions de cours

Question de cours 1. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

Question de cours 2. — Montrer que $f: x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

— Montrer que g définie par $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x} \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}_+$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Question de cours 3. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2} \sin(x) + 1$. On admet que f a un unique point fixe α et on définit la suite u par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.
2. Conclure quant à la convergence de la suite.

Question de cours 4. Étudier la régularité de la fonction $f: x \mapsto x^3 \sin(x)$ et calculer l'expression de $f^{(n)}$ pour $n \geq 3$.

Exercices

Difficulté faible

Exercice 1. Calculer rapidement les dérivées successives de $f: x \mapsto \sin^3(x)$, $g: x \mapsto e^x \sin(x)$ et $h: x \mapsto \frac{x}{x^2 + 3x + 2}$.

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I centré en 0. Montrer que si f est paire alors f' est impaire et que si f est impaire alors f' est paire.

Exercice 3. Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite k -lipschitzienne si $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Supposons de plus f dérivable. Montrer que f est k -lipschitzienne ssi $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$.

Exercice 4. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivable.

1. On suppose que f s'annule en $n + 1$ points distincts de $[a, b]$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. On suppose que $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Difficulté moyenne

Exercice 5. Soient a et b deux réels et $f: x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}$ et en déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 6 (théorème du point fixe). Soit $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction dérivable telle qu'il existe $k \in]0, 1[$ telle que $\forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq k$. Soit par ailleurs u une suite définie par $u_0 \in [a, b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe γ .
2. Montrer que u converge vers γ .

Exercice 7. Quelle est la régularité de $x \mapsto |x|x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 8 (règle de l'HOSPITAL). Soient $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

1. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$.
2. En déduire que si $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$ alors $\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$.
3. Application : étudier la limite de $x \mapsto \frac{\cos(x) - e^x}{(x+1)e^x - 1}$ en 0.

Exercice 9. Soit $f: x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que $\tilde{f}^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ pour tout $x \neq 0$.
3. En posant $t = \frac{1}{x^2}$, conclure que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. Montrer que $\ell = 0$.

Exercice 11. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $f(a) = 0$. Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{C}_f$ distinct de l'origine O du repère tel que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en ce point passe par O .

Exercice 12. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un intervalle I centré en a tel que $f(x) \neq f(a)$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$.
2. On suppose de plus que f' est continue en a . Montrer qu'il existe un intervalle I centré en a tel que $f|_I$ est injective.

Plus difficile

Exercice 13. Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = \lim_{+\infty} f$. Montrer que f' s'annule.

Exercice 14. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$. Montrer que f' s'annule.

Exercice 15. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.