

Exercices colle n° 27

Samuel Debray

Mardi 11 et mercredi 12 mai 2021

Questions de cours

Question de cours 1. On lance une pièce de monnaie truquée n fois de suite. La probabilité d'obtenir *pile* est $p \in]0, 1[$. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. A : « on obtient exactement n *piles* » ;
2. pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, B_k : « on obtient dans cet ordre k *pile* et $n - k$ *face* » ;
3. pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, C_k : « *pile* est apparu k fois au cours des n tirages ».

Question de cours 2. Le fonctionnement d'un appareil au cours du temps obéit aux règles suivantes :

- si l'appareil fonctionne à la date $n - 1$, il a la probabilité a de fonctionner à la date n ,
- si l'appareil est en panne à la date $n - 1$, il a la probabilité b d'être en panne à la date n ,

avec $(a, b) \in]0, 1[^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note M_n l'évènement « l'appareil est en état de marche à la date n » et $p_n = \mathbb{P}(M_n)$. Quelle est la valeur de p_n , en supposant que l'appareil est en état de marche à la date 0 ?

Question de cours 3. Soit $f : x \mapsto x^2 + x + |2x(x+2)|$. Étudier la dérivabilité de f en 0 et représenter les demi-tangentes de la courbe \mathcal{C}_f en 0. Quelles sont les positions relatives de ces demi-tangentes par rapport à \mathcal{C}_f ?

Question de cours 4. Soit $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur \mathbb{R}^* . Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Étudier la dérivabilité en 0 de son prolongement.

Exercices

Difficulté faible

Exercice 1. On considère un lot de 16 composants électroniques dont 4 sont défectueux. On prélève au hasard, successivement et sans remise 3 composants. Calculer la probabilité qu'ils soient tous défectueux sans utiliser de dénombrement.

Exercice 2. On dispose de deux pièces de monnaie équilibrées. L'une est honnête, l'autre a 2 *pile*. On choisit un hasard une pièce et on la lance 3 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 *pile* ?

Exercice 3. Dans un grand restaurant, on a remarqué que 15% des clients mangent à la carte et que 85% choisissent un menu. Parmi les clients choisissant la formule à la carte, 30% prennent un dessert, contre 45% des clients prenant un menu.

1. On interroge au hasard un client de ce grand restaurant.
 - (a) Quelle est la probabilité que ce soit un client ayant mangé à la carte et ayant pris un dessert ?
 - (b) Quelle est la probabilité que ce soit un client ayant pris un dessert ?
2. On interroge au hasard un client qui a pris un dessert. Quelle est la probabilité qu'il ait mangé à la carte ?

Exercice 4. Étudier la fonction $f : x \mapsto x \exp(-x^2)$.

Exercice 5. Calculer rapidement les dérivées successives de $f : x \mapsto \sin^3(x)$ et $g : x \mapsto e^x \sin(x)$.

Difficulté moyenne

Exercice 6. On dispose de $n \geq 2$ boules rouges numérotées de 1 à n et n boules noires numérotées de 1 à n . On répartit ces boules au hasard dans n boîtes numérotées de 1 à n , à raison de deux boules par boîte.

1. Soit Ω l'univers des possibles associé à cette expérience. Calculer le cardinal de Ω . On munit alors Ω de la probabilité uniforme.
2. Calculer la probabilité p_n que toutes les boîtes contiennent une boule rouge et une noire.
3. (a) Montrer que $\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{k} \leq 2^n$ et que $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{k} \geq 2^{n-1}$.
(b) En déduire que $\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$.
(c) Conclure sur la convergence de (p_n) et sa limite éventuelle.

Exercice 7. On considère deux urnes U_1 et U_2 . Chaque urne contient une boule. À chaque étape, on choisit une boule au hasard et on la change d'urne. On note E_n^k l'évènement « il y a k boules dans l'urne U_1 après l'étape n » pour $k \in \{0, 1, 2\}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $a_n = \mathbb{P}(E_n^0)$, $b_n = \mathbb{P}(E_n^1)$, $c_n = \mathbb{P}(E_n^2)$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice A telle $X_{n+1} = AX_n$. Calculer A^2 et A^3 . Interpréter.

Exercice 8 (urne de POLYA). Une urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches. On effectue des tirages successifs d'une boule, en remettant après chaque tirage la boule tirée avec en plus $c > 0$ boules de la même couleur.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la deuxième est blanche ?
2. Notons $R_n^{b,r}$ (resp. $B_n^{b,r}$) l'évènement « la n -ième boule tirée est rouge (resp. blanche) ». On veut montrer que $\mathbb{P}(R_n^{b,r})$ ne dépend pas de n .
(a) Vérifier que $\mathbb{P}(R_2^{b,r}) = \mathbb{P}(R_1^{b,r})$.
(b) On suppose le résultat vrai au rang $n-1$. Que valent $\mathbb{P}(R_n^{b,r} | R_1^{b,r})$ et $\mathbb{P}(R_n^{b,r} | B_1^{b,r})$?
(c) Conclure.

Exercice 9 (paradoxe des anniversaires). On considère une assemblée de n personnes.

1. On fixe une personne P de cette assemblée. Quelle est la probabilité qu'une personne de l'assemblée autre que P ait son anniversaire le même jour que P ? Pour quelle valeur de n cette probabilité est-elle au moins égale à $\frac{1}{2}$?
2. Quelle est la probabilité que deux personnes aient leur anniversaire le même jour ? Pour quelle valeur de n cette probabilité est-elle au moins égale à $\frac{1}{2}$?

Exercice 10 (problème des allumettes de BANACH). Un fumeur a dans chaque poche une boîte d'allumettes qui contient au départ N allumettes. Chaque fois qu'il veut fumer, il choisit une poche au hasard.

1. Calculer la probabilité $p(x)$ que, lorsque le fumeur se rend compte pour la première fois qu'une boîte est vide, l'autre boîte contienne exactement x allumettes.
2. Dans le cas $x = 0$ (qui correspond au problème historique) déterminer un équivalent de $p(x)$ lorsque N tend vers l'infini et interpréter, sachant qu'il y a environ cinquante allumettes dans une petite boîte standard.

On admettra la formule de STIRLING : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Exercice 11 (problème de MONTY HALL). Vous participez à un jeu télévisé et êtes face à trois portes : derrière l'une se trouve une voiture et derrière les deux autres se trouvent des chèvres. Vous choisissez une porte (par exemple la n° 1) et le présentateur, qui sait ce qu'il y a derrière chaque porte, en ouvre une autre qui cache une chèvre (par exemple la n° 3). Il vous demande ensuite : « Voulez-vous changer pour la porte n° 2 ? ».

Est-il à votre avantage de changer de porte ?

Exercice 12 (formule de LEIBNIZ). 1. Soit f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^∞ . Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

2. Application : soient a et b deux réels et $f: x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$. Calculer $f^{(n)}$ et en déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 13. Soit $f: x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ pour tout $x \neq 0$.
2. En posant $t = \frac{1}{x^2}$, déterminer la limite de $f^{(n)}(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.

Plus difficile

Exercice 14. Un train contient n places numérotées et n voyageurs possèdent un billet. Le premier voyageur monte dans le train mais il a oublié son billet et se place donc au hasard. Puis chaque personne s'installe à sa place si elle est libre et choisit une place libre au hasard sinon. Quelle est la probabilité que la dernière personne se trouve à sa place ?