

Exercices colle n° 26

Samuel Debray

Mardi 4 et mercredi 5 mai 2021

Questions de cours

Question de cours 1. On lance un dé truqué. Montrer qu'il existe une probabilité \mathbb{P} telle que la probabilité d'obtenir $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$ soit proportionnelle à k (avec toujours la même proportion). Avec cette probabilité, calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Question de cours 2. D'un jeu de 52 cartes, 5 cartes sont distribuées à un joueur.

1. Quelle est la probabilité que ce joueur ait en main exactement trois carreaux ?
2. Quelle est la probabilité que ce joueur ait en main au moins une paire ?

Question de cours 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne \mathcal{U} contient des jetons numérotés : un jeton numéroté 1, deux jetons numérotés 2, \dots , n jetons numérotés n . On dispose de plus de n urnes numérotés de 1 à n . L'urne i contient i boules blanches et $n - i$ boules noires. On tire un jeton dans \mathcal{U} : si le jeton tiré porte le numéro i , alors on prélève une boule dans l'urne i .

Quelle est la probabilité que la boule prélevée soit blanche ?

Question de cours 4. Lors d'une interrogation, un étudiant se trouve face à une question dont m réponses possibles sont proposées et une seule est correcte. Soit l'étudiant connaît la réponse à la question, soit il choisit au hasard la réponse parmi les m proposées. La probabilité que cet étudiant connaîsse la réponse à la question est $p \in]0, 1[$.

Sachant que l'étudiant a répondu correctement à la question posée, quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la bonne réponse ?

Question de cours 5. On lance deux équilibrés de couleurs différentes à 6 faces. Soient les événements suivants : A : « la somme fait 7 », B : « le premier dé donne 4 » et C : « le second dé donne 3 ». Montrer que ces trois événements sont deux-à-deux indépendants mais qu'ils ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercices

Difficulté faible

Exercice 1. Un concours consiste à passer trois épreuves indépendantes. On a 80% de chances de réussir l'épreuve n° 1, 60% pour l'épreuve n° 2 et 25% pour l'épreuve n° 3. On est reçu au concours si on réussit au moins deux épreuves sur trois. Quelle est la probabilité de réussir le concours ?

Exercice 2. On place aléatoirement n boules indiscernables dans n urnes discernables. Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide.

Exercice 3. On considère un lot de 16 composants électroniques dont 4 sont défectueux. On prélève au hasard, successivement et sans remise 3 composants. Calculer la probabilité qu'ils soient tous défectueux sans utiliser de dénombrement.

Exercice 4. On dispose de deux pièces de monnaie équilibrées. L'une est honnête, l'autre a 2 *pile*. On choisit au hasard une pièce et on la lance 3 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 *pile* ?

Exercice 5. D'après le site Santé TN, en France, 0,5% des femmes sont daltoniennes contre 8% des hommes. On choisit au hasard une personne daltonienne. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ?

Difficulté moyenne

Exercice 6. Un horticulteur dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an. Pour chaque plante, la première année, la probabilité de donner une fleur rose est de $\frac{3}{4}$, celle de donner une fleur blanche est de $\frac{1}{4}$. Puis les années suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- si l'année n , la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n + 1$, elle donnera une fleur rose ;
 - si l'année n , la plante a donné une fleur blanche, alors l'année $n + 1$, elle donnera de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche.
1. Quelle est la probabilité que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années ?
 2. Quelle est la probabilité que la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années ?
 3. On note p_n la probabilité de l'évènement « la plante a donné une fleur rose l'année n ». Calculer p_n puis sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 7. N personnes numérotées de 1 à N se transmettent dans cet ordre une information. Chaque personne transforme l'information reçue en son contraire avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et la transmettent fidèlement avec la probabilité $1 - p$. Pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on note A_n l'évènement « la n -ième personne reçoit l'information non déformée » et $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par (p_n) .
2. En déduire la probabilité que la N -ième personne reçoive l'information non déformée.
3. Commenter le comportement lorsque $N \rightarrow +\infty$.

Exercice 8. On considère deux urnes U_1 et U_2 . Chaque urne contient une boule. À chaque étape, on choisit une boule au hasard et on la change d'urne. On note E_n^k l'évènement « il y a k boules dans l'urne U_1 après l'étape n » pour $k \in \{0, 1, 2\}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $a_n = \mathbb{P}(E_n^0)$, $b_n = \mathbb{P}(E_n^1)$, $c_n = \mathbb{P}(E_n^2)$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice A telle $X_{n+1} = AX_n$. Calculer A^2 et A^3 . Interpréter.

Exercice 9 (paradoxe du singe savant). Soit N le nombre de caractères d'un roman figurant au programme des concours des prépas scientifiques.

Plaçons un singe devant une machine à écrire comportant 100 touches. On suppose que le singe frappe les touches du clavier aléatoirement et de façon indépendante et on note A_n l'évènement « le singe écrit le texte du roman entre les frappes nN et $nN + N - 1$ ».

1. Justifier succinctement que les A_n sont indépendants et calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n)$ où B_n est l'évènement : « le singe écrira (au moins une fois) le roman dans son intégralité avant la nN -ième frappe ».

Exercice 10 (urne de POLYA). Une urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches. On effectue des tirages successifs d'une boule, en remettant après chaque tirage la boule tirée avec en plus $c > 0$ boules de la même couleur.

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit rouge sachant que la deuxième est blanche ?
2. Notons $R_n^{b,r}$ (resp. $B_n^{b,r}$) l'évènement « la n -ième boule tirée est rouge (resp. blanche) ». On veut montrer que $\mathbb{P}(R_n^{b,r})$ ne dépend pas de n .
 - (a) Vérifier que $\mathbb{P}(R_2^{b,r}) = \mathbb{P}(R_1^{b,r})$.
 - (b) On suppose le résultat vrai au rang $n - 1$. Que valent $\mathbb{P}(R_n^{b,r} | R_1^{b,r})$ et $\mathbb{P}(R_n^{b,r} | B_1^{b,r})$?
 - (c) Conclure.

Exercice 11 (paradoxe des anniversaires). On considère une assemblée de n personnes.

1. On fixe une personne P de cette assemblée. Quelle est la probabilité qu'une personne de l'assemblée autre que P ait son anniversaire le même jour que P ? Pour quelle valeur de n cette probabilité est-elle au moins égale à $\frac{1}{2}$?
2. Quelle est la probabilité que deux personnes aient leur anniversaire le même jour? Pour quelle valeur de n cette probabilité est-elle au moins égale à $\frac{1}{2}$?

Exercice 12 (problème des allumettes de BANACH). Un fumeur a dans chaque poche une boîte d'allumettes qui contient au départ N allumettes. Chaque fois qu'il veut fumer, il choisit une poche au hasard.

1. Calculer la probabilité $p(x)$ que, lorsque le fumeur se rend compte pour la première fois qu'une boîte est vide, l'autre boîte contienne exactement x allumettes.
2. Dans le cas $x = 0$ (qui correspond au problème historique) déterminer un équivalent de $p(x)$ lorsque N tend vers l'infini et interpréter, sachant qu'il y a environ cinquante allumettes dans une petite boîte standard.

On admettra la formule de STIRLING : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Plus difficile

Exercice 13 (problème de MONTY HALL). Vous participez à un jeu télévisé et êtes face à trois portes : derrière l'une se trouve une voiture et derrière les deux autres se trouvent des chèvres. Vous choisissez une porte (par exemple la n° 1) et le présentateur, qui sait ce qu'il y a derrière chaque porte, en ouvre une autre qui cache une chèvre (par exemple la n° 3). Il vous demande ensuite : « Voulez-vous changer pour la porte n° 2 ? ».

Est-il à votre avantage de changer de porte ?

Exercice 14. Un train contient n places numérotées et n voyageurs possèdent un billet. Le premier voyageur monte dans le train mais il a oublié son billet et se place donc au hasard. Puis chaque personne s'installe à sa place si elle est libre et choisit une place libre au hasard sinon. Quelle est la probabilité que la dernière personne se trouve à sa place ?