

# Exercices colle n° 22

Samuel Debray

Mardi 30 et mercredi 31 mars 2021

## Questions de cours

**Question de cours 1.** Soit  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $B^3 - B$  puis en déduire que  $B$  est inversible.

Préciser  $B^{-1}$ .

**Question de cours 2.** On pose  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .  $A$  est-elle inversible ? Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Question de cours 3.** Soit  $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$  où  $A$  est la matrice définie par  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Donner deux matrices appartenant à  $C(A)$ .
2. Montrer que, pour tout  $M, M' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $(M, M') \in C(A)^2 \implies M + M' \in C(A)$ .
3. Déterminer  $C(A)$  sous la forme un espace vectoriel engendré.

**Question de cours 4.** Déterminer, si possible, les inverses des matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Question de cours 5.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A^2 = A + 2I_3$ . En déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

## Exercices

### Difficulté faible

**Exercice 1.** Calculer  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  pour  $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 2.** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = A - I_3$ . Calculer  $B^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et en déduire  $A^n$ .

## Difficulté moyenne

**Exercice 3.** Soient  $M = \begin{pmatrix} -13/2 & 3 \\ -35/2 & 8 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ .

1. Vérifier que  $P$  est inversible et calculer son inverse.
2. Montrer que  $P^{-1}MP$  est une matrice diagonale  $D$  que l'on précisera.
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $D^n$  et en déduire  $M^n$ .

**Exercice 4.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $M = \begin{pmatrix} -a + 3b & a - b & 0 \\ -3(a - b) & 3a - b & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer deux matrices  $A$  et  $B$  telles que  $M = aA + bB$ .
2. Calculer  $A^n$  et  $B^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. En déduire  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 5.** Soient  $a, b$  des réels non nuls et  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ . Trouver toutes les matrices  $B$  de taille  $2 \times 2$  qui commutent avec  $A$ , c'est-à-dire telles que  $AB = BA$ .

**Exercice 6.** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . Montrer que  $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O_2$ . Donner une CNS pour que  $A$  soit inversible et, le cas échéant, déterminer  $A^{-1}$ .

**Exercice 7.** Soient  $\omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3$  les trois racines complexes du polynôme  $X^3 - pX - q$ . On pose  $A = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_2 & \omega_3 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_2 & \omega_3 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix}$ . Calculer, si c'est possible,  $AB$  et  $BA$  en fonction de  $p$  et  $q$ .

**Exercice 8.** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} = aI + bJ$ .

1. Calculer  $J^2$  puis  $J^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
2. En déduire  $A^2$  puis  $A^3$  en fonction de  $I$  et  $J$ .
3. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 4^{k-1} b^k (a-b)^{n-k} = \frac{1}{4} ((a+3b)^n - (a-b)^n)$$

et en déduire  $A^n$  en fonction de  $I$  et  $J$ .

4. Exprimer  $A^2$  en fonction de  $A$  et  $I$ . En déduire que si  $a \neq b$  et  $a \neq -3b$  alors  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$  en fonction de  $A$  et  $I$ .
5. Montrer que, dans les conditions de la question précédente, la formule trouvée pour  $A^n$  reste valable lorsque  $n = -1$ .

**Exercice 9.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Écrire  $A^2$  en fonction de  $A$  et  $I_2$ .
2. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .
3. Montrer qu'il existe deux suites  $u$  et  $v$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = u_n A + v_n I_3$ .
4. Déterminer  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ .

Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  les suites définies par  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 0$  et  $z_0 = 0$  et telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 2y_n + z_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n + 2z_n \\ z_{n+1} = -x_n + 2y_n \end{cases} .$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ .

5. Montrer qu'il existe une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = AU_n$ .
6. Montrer que  $U_n = A^n U_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
7. En déduire les valeurs de  $x_n$ ,  $y_n$  et  $z_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Plus difficile

**Exercice 10.** 1. Pour  $n \geq 2$ , déterminer le reste de la division euclidienne de  $X^n$  par  $X^2 - 3X + 2$ .

2. Soit  $A$  la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Déduire de la question précédente la valeur de  $A^n$  pour  $n \geq 2$ .

**Exercice 11** (lemme d'HADAMARD). Soit  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$ . Montrer que  $A$  est inversible.