

Exercices colle n° 21

Samuel Debray

Mardi 23 et mercredi 24 mars 2021

Définitions

Définition 1. Suite convergente vers un réel ℓ .

Définition 3. Suites adjacentes.

Définition 2. Suite divergeant vers $+\infty$.

Définition 4. u est dominée par v .

Questions de cours

Question de cours 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit la fonction $f_n: x \mapsto x^n + x - 1$. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Montrer que $(x_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Question de cours 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Qu'en déduire sur (S_n) ?

Question de cours 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 \in]0, 1[$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$ puis que u converge vers 0.

2. La suite S définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=1}^n u_k^2$ est-elle convergente ?

Question de cours 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 1$, $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \leq 0$.

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \ln(n+1)$. Qu'en conclure ?

Exercices

Difficulté faible

Exercice 1. Trouver un équivalent simple des suites suivantes et en déduire leur limite :

$$(n + 3 \ln(n))e^{-(n+1)}, \quad \frac{\ln(n^2 + 1)}{n + 1}, \quad \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt[3]{n^2 - n + 1}}.$$

Exercice 2. Trouver un équivalent simple des suites suivantes et en déduire leur limite :

$$\frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{\ln(n) - 2n^2}, \quad \frac{2n^3 - \ln(n) + 1}{n^2 + 1}, \quad \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}.$$

Exercice 3. Calculer, lorsque c'est possible, les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

— $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

— $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

— $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 3A + 2I_3 = O_3$. En déduire l'expression en fonction de A d'une matrice A' telle que $AA' = A'A = I_3$.

Difficulté moyenne

Exercice 5. Montrer que la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{n}{k(k+1)}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 6. Soit (u_n) une suite complexe. Montrer que si (u_n^2) et (u_n^3) convergent, alors (u_n) aussi.

Exercice 7. Soit u une suite d'éléments de $]0, 1[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, (1 - u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}$. Montrer que u converge et déterminer sa limite.

Exercice 8 (série harmonique). On considère la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Étudier la monotonie de (H_n) .
2. Montrer que, pour tout $n > 1$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

et en déduire que

$$\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} \leq \ln(n) - \ln(n-1).$$

3. En déduire la nature de la suite (H_n) et montrer que $H_n \sim \ln(n)$ au voisinage de $+\infty$.
4. Montrer que la suite de terme général $H_n - \ln(n)$ converge vers un certain réel γ appelé constante d'EULER-MASCHERONI dont on donnera un encadrement.

Exercice 9 (nombre d'or). On appelle nombre d'or et on note ϕ la solution positive réelle de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

1. Justifier l'existence de $1 < \phi < 2$ et en donner une expression en fonction de lui-même.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = \sqrt{1}$, $u_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}}$, $u_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$ et ainsi de suite

$$u_n = \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$$

avec n radicaux.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que (u_n) converge vers ϕ .
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|$.

5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Exercice 10. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire A^n .

Exercice 11. Soient a, b des réels non nuls et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices B de taille 2×2 qui commutent avec A , c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 12. Soient $M = \begin{pmatrix} -13/2 & 3 \\ -35/2 & 8 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$. On note $P' = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $PP' = P'P = I_2$.
2. Montrer que $P'MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n et en déduire M^n .

Plus difficile

Exercice 13. Étudier (monotonie, convergence, limite éventuelle) la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = e^{u_n}$.

Exercice 14. Étudier (monotonie, convergence, limite éventuelle) la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Exercice 15 (théorème de CESÀRO). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite qui converge vers ℓ . Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge également vers ℓ .

Exercice 16 (suites de CAUCHY). On dit qu'une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de CAUCHY ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R} \cdot \forall n, p \geq N, |u_n - u_p| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente est de CAUCHY.
2. On s'intéresse maintenant à la réciproque. Soit u une suite de CAUCHY.
 - (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{U}_n = \{u_p \mid p \leq n\}$. Montrer que u est bornée et en déduire que $\mathcal{U}_n$ est borné pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) Il est alors légitime de poser $a_n = \inf(\mathcal{U}_n)$ et $b_n = \sup(\mathcal{U}_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq u_n \leq b_n$.
 - (c) Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
 - (d) Conclure.