

# Exercices colle n° 19

Samuel Debray

Mercredi 10 mars 2021

## Définitions

**Définition 1.** Suite minorée et suite majorée.

**Définition 2.** Rappeler les inégalités classiques avec partie entière et valeur absolue.

**Définition 3.** Donner la formule du terme général d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique si le premier terme est  $u_p$ . Pour  $n \geq p$ , donner l'expression de la somme  $\sum_{k=p}^n u_k$ .

## Questions de cours

**Question de cours 1.** Soit  $(a, b, n) \in \mathbb{N}^3$ . On tire simultanément  $n$  boules d'une urne contenant  $a$  boules rouges et  $b$  boules bleues.

1. Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , déterminer le nombre de tirages contenant  $k$  boules rouges et  $n - k$  boules bleues.

2. En déduire la formule de VANDERMONDE :  $\sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$  puis  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ .

**Question de cours 2.** Soient  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $t_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$ . Montrer que  $t$  est majorée par  $x$ .

**Question de cours 3.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{2}{7}u_n + \frac{3}{4}$ .

Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  puis calculer  $\sum_{k=0}^n u_k$ .

**Question de cours 4.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit la fonction  $f_n$  par  $f_n(x) = x^n + nx - 1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique  $x_n \in \mathbb{R}^+$  tel que  $f_n(x_n) = 0$ . Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est bornée.

## Exercices

### Difficulté faible

**Exercice 1.** Sur une étagère, on range  $n$  tomes d'une encyclopédie. Combien y-a-t-il de manières de les ranger tout en étant sûr que le tome 1 et le tome 2 sont côte à côte et dans cet ordre ?

**Exercice 2.** Un domino est un rectangle constitué de deux carrés, chacun comportant entre 0 et 6 points.

1. Combien existe-t-il de dominos ?

2. Combien de paires peut-on former avec des dominos ayant (exactement) un nombre en commun ?

**Exercice 3.** On considère la suite  $u$  définie par  $u_n = \frac{3n+1}{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $u$  est bornée.

## Difficulté moyenne

**Exercice 4.** On dispose de trois urnes notées  $A, B, C$  et de six boules. On répartit les six boules dans les trois urnes (chaque urne peut contenir de 0 à 6 boules). Une répartition est une liste ordonnée de trois nombres indiquant le nombre de boules contenues dans les urnes  $A, B$  et  $C$ . Par exemple, la répartition  $(2, 4, 0)$  indique que l'urne  $A$  contient 2 boules, l'urne  $B$  en contient 4 et l'urne  $C$  est vide. Déterminer le nombre de répartitions

1. en tout ;
2. telles que l'urne  $A$  est vide ;
3. telles que l'urne  $A$  est la seule urne vide ;
4. telles qu'une urne et une seulement est vide ;
5. telles qu'aucune urne n'est vide ;
6. telles qu'au moins une urne est vide.

**Exercice 5.** Dénombrer de deux manières différentes les couples  $(a, A)$  avec  $a \in E$  et  $A \subseteq E$  tels que  $a \notin A$  et en déduire  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$ .

**Exercice 6.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Combien existe-t-il de surjections de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ?

**Exercice 7.** Dix personnes de moins de soixante ans sont dans une pièce (l'âge d'une personne est un nombre entier). Montrer que l'on peut constituer deux groupes de personnes qui n'ont aucun membre en commun et tels que la somme des âges des membres du premier groupe est égale à la somme des âges des membres du second. *Remarque* : tout le monde n'est pas obligé d'appartenir à un groupe.

**Exercice 8** (applications croissantes). Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$  tels que  $p \leq n$ .

1. Dénombrer les applications  $f: \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  strictement croissantes.
2. En déduire le nombre d'applications  $f: \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  croissantes.

**Exercice 9.** Soit  $u$  une suite définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = u_n + 2^n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $v$  la suite définie par  $v_n = u_{n+1} - u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Exprimer de deux façons la somme  $\sum_{k=0}^n v_k$ .
2. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 10.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}$ .

## Plus difficile

**Exercice 11.** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $2n$ . Une partition de  $E$  en paires est un ensemble  $\{\{a_1, b_1\}, \dots, \{a_n, b_n\}\}$  avec pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i \neq b_i$  et  $(\{a_1, b_1\}, \dots, \{a_n, b_n\})$  est une partition de  $E$ . Dénombrer les partitions de  $E$  en paires.

**Exercice 12.** Calculer le nombre de parties de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ne contenant pas deux entiers consécutifs.

**Exercice 13.** De combien de façons différentes peut-on ranger les nombres  $1, 2, \dots, n$  si l'on veut que le produit de deux nombres voisins soit toujours pair ?