

# Exercices colle n° 17

Samuel Debray

Mercredi 10 février 2021

## Questions de cours

**Question de cours 1.** Soient deux applications  $f: A \rightarrow B$  et  $g: B \rightarrow C$ .

Montrer que (i) si  $g \circ f$  est injective alors  $f$  est injective et (ii) si  $g \circ f$  est surjective alors  $g$  est surjective.

**Question de cours 2.** Étudier la bijectivité de la fonction  $f: x \mapsto x^2 - x \ln(x) - 1$  de  $\mathbb{R}_+^*$  sur un intervalle à déterminer. Donner le tableau de variations de la fonction réciproque.

**Question de cours 3.** Justifier que la fonction arccos, définie sur  $[-1, 1]$ , est dérivable sur  $] - 1, 1[$ . Démontrer que pour tout  $x \in ] - 1, 1[$ ,  $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**Question de cours 4.** Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

## Exercices

### Difficulté faible

**Exercice 1.** Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? En cas de bijectivité, déterminer l'application réciproque.

$$\begin{array}{l} f_1: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 \end{array} \right. \quad f_2: \left| \begin{array}{l} ]0, +\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) \longmapsto \frac{2a+3b}{a+b} \end{array} \right. \quad f_3: \left| \begin{array}{l} [1, +\infty[ \longrightarrow [1, +\infty[ \\ x \longmapsto \frac{2x^2}{1+x} \end{array} \right. \\ f_4: \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{z}{1+|z|} \end{array} \right. \quad f_5: \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}_+^* \\ (a, b) \longmapsto a + \frac{1}{b} \end{array} \right. \end{array}$$

### Difficulté moyenne

**Exercice 2.** Soit  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  impaire et bijective. Montrer que  $f^{-1}$  est impaire. Que dire de cet énoncé si l'on remplace « impaire » par « paire ».

**Exercice 3.** Montrer que la fonction  $\sinh: x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et calculer sa réciproque.

On pourra considérer la fonction  $\cosh: x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  et montrer que  $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$  et  $\cosh + \sinh = \exp$ .

**Exercice 4.** Montrer que  $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle à préciser et calculer sa réciproque.

**Exercice 5.** Soit  $f: X \rightarrow X$ . On suppose  $f \circ f = f$ . Montrer que

1. si  $f$  est injective alors  $f = \text{id}_X$ .

2. si  $f$  est surjective alors  $f = \text{id}_X$ .

**Exercice 6.** Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (ax + y, x + ay, x + y) \in \mathbb{R}^3$ . CNS sur  $a$  pour que  $f$  soit injective? surjective?

**Exercice 7.** Soient  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$  et  $B \subseteq Y$ .

1. Montrer que  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ . CNS sur  $f$  pour avoir égalité pour tout  $A$ ?
2. Montrer que  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ . CNS sur  $f$  pour avoir égalité pour tout  $B$ ?

### Plus difficile

**Exercice 8.** Rappeler la formule trigonométrique  $\sin(a+b)$ . Montrer que  $\arcsin\left(\frac{5}{13}\right) + \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{56}{65}\right)$ .

**Exercice 9.** Soit  $f: \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n^2 \end{cases}$ .

1. Existe-t-il  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$ ?
2. Existe-t-il  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $h \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$ ?

**Exercice 10.** Soient  $f$  et  $g: X \rightarrow X$  telles que  $f \circ g \circ f = g$  et  $g \circ f \circ g = f$ .

1. Montrer que si  $f$  est injective alors  $f$  et  $g$  sont bijectives (i.e. injectives et surjectives).  
*On pourra commencer par montrer que si  $h$  est injective et  $h \circ i = h \circ j$  alors  $i = j$ .*
2. Montrer que si  $f$  est surjective alors  $f$  et  $g$  sont bijectives.