

# Exercices colle n° 16

Samuel Debray

Mercredi 3 février 2021

## Définitions

**Définition 1.** Famille libre.

**Définition 2.** Famille liée.

**Définition 3.** Famille génératrice de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 4.** Image directe.

**Définition 5.** Image réciproque.

**Définition 6.** Application injective.

**Définition 7.** Application surjective.

## Questions de cours

**Question de cours 1.** Soit  $h: \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{z+1}{z-1} \end{cases}$ . Montrer que  $h(\mathbb{U} \setminus \{1\}) \subseteq i\mathbb{R}$ . A-t-on l'inclusion réciproque ?

**Question de cours 2.** Pour chaque implication ci-dessous, déterminer les images directes et réciproques demandées.

1. Soit  $f: z \in \mathbb{C} \mapsto |z| \in \mathbb{R}$ . Calculer  $f^{-1}(\{1\})$ .
2. Soit  $g: z \in \mathbb{C} \mapsto z^n \in \mathbb{C}$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ). Calculer  $g^{-1}(\{1\})$  puis  $g^{-1}(\{a\})$  avec  $a \in \mathbb{C}^*$ .
3. Soit  $h: z \in \mathbb{C}^* \mapsto \arg(z) \in ]-\pi, \pi]$ . Calculer  $h(\mathbb{R}^*)$ ,  $h(i\mathbb{R}^*)$ ,  $h(\mathbb{R}_-^*)$  et  $h(i\mathbb{R}_+^*)$ .

**Question de cours 3.** Montrer que  $\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ . Coordonnées de  $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  dans cette base ?

**Question de cours 4.** Notons  $\mathcal{F}$  la famille  $\mathcal{F} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

La famille  $\mathcal{F}$  est-elle génératrice de  $\mathbb{R}^4$  ? libre ?

Déterminer une équation cartésienne de  $\text{Vect}(\mathcal{F})$ .

## Exercices

### Difficulté faible

**Exercice 1.** L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ? « Si  $\{u, v\}$  est une famille libre et  $\{u, v, w\}$  est liée alors on a nécessairement  $w \in \text{Vect}(\{u, v\})$ . »

**Exercice 2.** Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ?

$$f_1: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 \end{cases} \quad f_2: \begin{cases} ]0, +\infty[^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a, b) & \longmapsto & \frac{2a + 3b}{a + b} \end{cases} \quad f_3: \begin{cases} [1, +\infty[ & \longrightarrow & [1, +\infty[ \\ x & \longmapsto & \frac{2x^2}{1 + x} \end{cases}$$

$$f_4: \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{z}{1 + |z|} \end{cases} \quad f_5: \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{Q}_+^* \\ (a, b) & \longmapsto & a + \frac{1}{b} \end{cases}$$

**Exercice 3.** Soient  $f: X \rightarrow Y$  et  $g: Y \rightarrow Z$ .

1. Montrer que si  $g \circ f$  est injective alors  $f$  est injective.
2. Montrer que si  $g \circ f$  est surjective alors  $g$  est surjective.

### Difficulté moyenne

**Exercice 4.** Soient  $a$  et  $b$  deux réels et soient  $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et  $v = \begin{pmatrix} a + 2b \\ a + b \end{pmatrix}$ . La famille  $(u, v)$  est-elle libre dans  $\mathbb{R}^2$  ?

**Exercice 5.** Dans  $\mathbb{R}^n$ , on considère une famille de quatre vecteurs libres  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ . Les familles suivantes sont-elles libres ?

1.  $(e_1, 2e_2, e_3)$  ;
2.  $(e_1, e_3)$  ;
3.  $(e_1, 2e_1 + e_4, e_3 + e_4)$  ;
4.  $(2e_1 + e_2, e_1 - 2e_2, e_4, 7e_1 - 4e_2)$ .

**Exercice 6.** Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $f: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (ax + y, x + ay, x + y) \in \mathbb{R}^3$ . CNS sur  $a$  pour que  $f$  soit injective ? surjective ?

**Exercice 7.** Soit  $f: X \rightarrow X$ . On suppose  $f \circ f = f$ . Montrer que

1. si  $f$  est injective alors  $f = \text{id}_X$ .
2. si  $f$  est surjective alors  $f = \text{id}_X$ .

**Exercice 8.** Soient  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A \subseteq X$  et  $B \subseteq Y$ .

1. Montrer que  $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ . CNS sur  $f$  pour avoir égalité pour tout  $A$  ?
2. Montrer que  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ . CNS sur  $f$  pour avoir égalité pour tout  $B$  ?

### Plus difficile

**Exercice 9.** Montrer que si  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre alors il en est de même pour la famille  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  où

$$f_i = \sum_{k=1}^i e_k.$$

**Exercice 10.** Soit  $f: \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n^2 \end{cases}$ .

1. Existe-t-il  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{N}}$  ?
2. Existe-t-il  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $h \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$  ?

**Exercice 11.** Soient  $f$  et  $g: X \rightarrow X$  telles que  $f \circ g \circ f = g$  et  $g \circ f \circ g = f$ .

1. Montrer que si  $f$  est injective alors  $f$  et  $g$  sont bijectives (i.e. injectives et surjectives).  
*On pourra commencer par montrer que si  $h \circ p$  est injective alors  $p$  est injective et que si  $h$  est injective et  $h \circ i = h \circ j$  alors  $i = j$ .*
2. Montrer que si  $f$  est surjective alors  $f$  et  $g$  sont bijectives.