

Exercices colle n° 12

Samuel Debray

Mercredi 6 janvier 2021

Questions de cours

Question de cours 1. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $(E) : y' + 2y = (x + 1)e^{-2x}$.

Question de cours 2. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* le problème de CAUCHY

$$(E) : \begin{cases} y' - \frac{3y}{x} = x \\ y(1) = 2 \end{cases} .$$

Question de cours 3. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E) : y'' + y = \cos(x)$.

Question de cours 4. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$ avec $y(0) = y'(0) = 1$.

Question de cours 5. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 2x^2 - 4x + 4$ en cherchant une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2.

Exercices

Difficulté faible

Exercice 1. Résoudre l'équation $y' + 2y = 2\sinh(2x)$.

Exercice 2. Résoudre $\sin(x)y' = \cos(x)y + 2x\sin^2(x)$ sur $]0, \pi[$.

Exercice 3. Calculer $\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right)$ puis résoudre l'équation $xy' - y = \ln(x)$.

Difficulté moyenne

Exercice 4. On s'intéresse à l'équation fonctionnelle $(E) : f(x+y) = f(x)f(y)$ où l'inconnue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable.

1. Montrer que la fonction nulle ainsi que les fonctions $t \mapsto e^{\alpha t}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ sont solutions de (E) .
2. Montrer réciproquement que si f est solution de (E) , alors il existe un réel a tel que f vérifie l'équation différentielle $f' - af = 0$.
3. Conclure sur les solutions de (E) .

Exercice 5 (circuit RLC série). Soit un circuit RLC série régi par l'équation en forme canonique $(E) : \ddot{u}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0$ où $\omega_0 > 0$ est la pulsation propre et $Q > 0$ le facteur de qualité (sans dimension). Notons Δ le discriminant de l'équation caractéristique de (E) . Selon les valeurs de Δ , trois cas sont possibles :

$\Delta > 0$: régime aperiodique, $\Delta = 0$: régime critique, $\Delta < 0$: régime pseudo-critique.

1. Indiquer les valeurs de Q et ω_0 pour lesquelles chacun des cas se produit.

2. Pour chacun des cas, écrire la forme des solutions.

3. Soit u une solution de (E) , vérifier qu'on a toujours $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$.

Exercice 6. Déterminer les fonctions dérivables $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$.

Exercice 7. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -2 \end{cases}$.

Exercice 8. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $y' = |y|$.

On admettra que si une solution de l'équation s'annule alors elle est uniformément nulle.

Plus difficile

Exercice 9. Soit $(E) : y'' + \cos(x)y = 0$.

1. Montrer que si y vérifie (E) alors y est paire.

2. Montrer que si y vérifie (E) et $\begin{cases} y(0) = y(2\pi) \\ y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}$ alors y est 2π -périodique.

Exercice 10 (principe des zéros isolés). Soient I un intervalle de \mathbb{R} et (E) un équation différentielle linéaire homogène $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Notons z une solution *non nulle* de (E) sur I . Montrer que les zéros de z sont isolés, c-à-d que pour tout zéro t_0 de z , il existe $\varepsilon > 0$ tel que z ne s'annule pas sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\setminus \{t_0\}$.

On admettra que si z est dérivable et si (u_n) est une suite qui converge vers a , alors $\frac{z(u_n) - z(a)}{u_n - a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z'(a)$.