

Exercices colle n° 11

Samuel Debray

Mercredi 16 et jeudi 17 décembre 2020

Questions de cours

Question de cours 1. Pour $n \geq 2$, donner l'ensemble \mathbb{U}_n des racines n -ièmes de l'unité. Préciser les ensembles \mathbb{U}_2 , \mathbb{U}_3 et \mathbb{U}_4 . Calculer la somme puis le produit des éléments de \mathbb{U}_n .

Question de cours 2. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 = 1 + i$.

Question de cours 3. — Soient A , B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives a , b et c . Montrer que ABC est un triangle équilatéral ssi $\frac{c-a}{b-a} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$.

— *Application.* Soient A , B et C trois points du plan de coordonnées respectives $(-1, 1)$, $(3, -1)$ et $(1 - \sqrt{3}, -2\sqrt{3})$. Montrer que ABC est un triangle équilatéral indirect.

Question de cours 4. Définir l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ telle que $|(1+i)z - 2i| = 2$ puis l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z - 2 + i| \geq |z + 4 + 3i|$.

Question de cours 5. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n pour lesquels les points M_n d'affixe $z_n = (\sqrt{6} - i\sqrt{2})^n$ appartient à l'axe des réels.

Des primitives

Primitive 1. Calculer $\int \tan(x) dx$.

Primitive 4. Calculer $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Primitive 2. Calculer $\int \frac{dx}{x \ln(x)}$.

Primitive 5. Calculer $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$.

Primitive 3. Calculer $\int \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx$.

Primitive 6. Calculer $\int \sin^4(x) \cos(x) dx$.

Exercices

Difficulté faible

Exercice 1. On désigne par A , B et M les points d'affixe respective -2 , $2i$ et z , où $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2, 2i\}$.

On pose $Z = \frac{z+2}{z-2i}$.

1. Interpréter géométriquement $|Z|$ et $\arg(Z)$.

2. Déterminer géométriquement l'ensemble E des points M tels que :

(a) Z soit réel.

(c) Z soit un élément de \mathbb{R}_+^* .

(b) Z soit imaginaire pur.

(d) $|Z| = 1$.

Exercice 2. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$). Soit $Z = \frac{z-2+i}{iz+1}$.

1. Exprimer les parties réelle et imaginaire de Z en fonction de x et y .

2. Déterminer l'ensemble E_1 des points M d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur.

3. Déterminer l'ensemble E_2 des points M d'affixe z tels que Z soit un réel.

Difficulté moyenne

Exercice 3. 1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.

2. Montrer que, dans le plan muni d'un repère orthonormal, les images des solutions appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 4 (identité du parallélogramme). Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 5 (droite des milieux). Soit ABC un triangle. On appelle I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$. Montrer que les droites (BC) et (IJ) sont parallèles.

Exercice 6. Soit A, B et C des points d'affixe respective $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 4 + i$ et $z_C = 5 + 3i$. Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 7. Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives a, b, c et d . Montrer que $ABCD$ est un rectangle ssi $a+c = b+d$ et $\frac{d-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 8 (théorème de l'angle au centre). Soit \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon r et $A, B, C \in \mathcal{C}$. Montrer que $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$.

Exercice 9. Résoudre l'équation $(z^2 + 1)^n = (z - i)^{2n}$.

Exercice 10. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\bar{z}^n = z$.

Plus difficile

Exercice 11. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2 \iff z \in \mathcal{C}(i, \sqrt{2}) \cup \mathcal{C}(-i, \sqrt{2}).$$

Exercice 12. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}.$$