

Exercices corrigés

Merci de me signaler toute coquille présente dans ce document : selim.cornet@dauphine.fr

Fonctions d'une variable

Exercice 2.3

Soient les fonctions f, g, h définies de la manière suivante :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2-3x}{5-2x}}, \quad g(x) = \sqrt{2x-5} \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(4x-3)^2$$

1. Déterminer leur domaine de définition.
2. Déterminer le domaine de définition des fonctions marginales de f, g, h et les calculer.
3. Donner un point x_0 appartenant aux trois domaines de définition des fonctions marginales de f, g et h .
4. Calculer l'élasticité des fonctions f, g, h et fg/h en x_0 .
5. On considère que la fonction h représente le chiffre d'affaires d'une entreprise en fonction du temps de travail $x \geq 1$.
 - (a) Montrer que le chiffre d'affaires est strictement croissant par rapport au temps de travail.
 - (b) Donner un développement limité à l'ordre 2 de h au point 1.
 - (c) En déduire la position de la tangente au point d'abscisse $x = 1$.

Corrigé

1. La fonction $\sqrt{\cdot}$ étant définie sur \mathbb{R}_+ , dressons un tableau de signe pour déterminer le domaine de définition de f .

x	$] - \infty, 2/3[$	$[2/3, 5/2[$	$]5/2, +\infty[$
$2-3x$	+	-	-
$5-2x$	+	+	-
$\frac{2-3x}{5-2x}$	+	-	+

f est donc définie sur $] - \infty, 2/3[\cup]5/2, +\infty[$. g est définie sur $]5/2, +\infty[$. \ln étant définie sur \mathbb{R}_+^* , la fonction h est définie sur $]3/4, +\infty[$.

2. La fonction $\sqrt{\cdot}$ étant dérivable sur tout son domaine de définition sauf en 0, f est dérivable sur $] - \infty, 2/3[\cup]5/2, +\infty[$,

et alors $f'_m(x) = f'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-2x}{2-3x}} \times \frac{-3(5-2x) + 2(2-3x)}{(5-2x)^2} = -\frac{11}{2(2-3x)^{1/2}(5-2x)^{3/2}}$.

De même, g est dérivable sur $]5/2, +\infty[$ et alors $g'_m(x) = g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-5}} = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$.

Enfin, \ln et $y \mapsto y^2$ étant dérivables sur tout leur domaine de définition, h est dérivable sur $]3/4, +\infty[$ et

$$h'_m(x) = h'(x) = 2 \ln(4x-3) \times \frac{4}{4x-3} = \frac{8 \ln(4x-3)}{4x-3}$$

3. L'intersection des trois domaines de définition des fonctions marginales est $]5/2, +\infty[$. Ainsi, $x_0 = 3$ appartient aux trois domaines de définition.

4. On a, pour tout $x \in] - \infty, 2/3[\cup]5/2, +\infty[$,

$$e_f(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{11x}{2(2-3x)^{1/2}(5-2x)^{3/2}} \sqrt{\frac{5-2x}{2-3x}} = -\frac{11x}{2(2-3x)(5-2x)}$$

Pour tout $x \in]5/2, +\infty[$, $e_g(x) = x \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{x}{2x-5}$. Pour tout $x \in]3/4, +\infty[$, $e_h(x) = x \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{8x}{(4x-3) \ln(4x-3)}$.

Enfin, pour tout $x \in]5/2, +\infty[$, $e_{fg/h}(x) = e_f(x) + e_g(x) - e_h(x) = -\frac{11x}{2(2-3x)(5-2x)} + \frac{x}{2x-5} - \frac{8x}{(4x-3) \ln(4x-3)}$.

5. (a) Étudions le signe de h_m . Pour $x > 1$, $4x - 3 > 1$ donc $\ln(4x - 3) > 0$, et $4x - 3 > 0$, donc $h_m(x) > 0$ pour $x > 1$, ce qui prouve que h est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
- (b) Pour tout $x \in]3/4, +\infty[$, $h''(x) = \frac{8 \times \frac{4}{4x-3}(4x-3) - 8 \ln(4x-3) \times 4}{(4x-3)^2} = \frac{32(1 - \ln(4x-3))}{(4x-3)^2}$. D'où le développement limité à l'ordre 2 en 1 :
- $$h(x) = h(1) + h'(1)(x-1) + \frac{h''(1)}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon(x-1) = 16(x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon(x-1), \text{ avec } \varepsilon(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0.$$
- (c) On calcule, au voisinage de 1, $h(x) - h(1) - h'(1)(x-1) = (x-1)^2(16 + \varepsilon(x-1))$. Or $(x-1)^2 \geq 0$ et $16 + \varepsilon(x-1) \geq 0$ au voisinage de 1 puisque $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x-1) = 0$. Donc au voisinage de 1, la courbe représentative de h est au-dessus de la tangente en 1.

Exercice 2.19

Soit $f : x \mapsto xe^{x^2+1/x}$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Donner le développement limité de f au point $x = 1$ à l'ordre 2.
3. En déduire la position de la tangente de f au voisinage du point $x = 1$.
4. Montrer que f est convexe sur $[1, +\infty[$.

Corrigé

1. L'exponentielle étant définie sur \mathbb{R} , la fonction f est définie en tout point x tel que $x^2 + 1/x$ soit défini, c'est-à-dire que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.
2. On calcule, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = e^{x^2+1/x} + x \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) e^{x^2+1/x} = \left(2x^2 + 1 - \frac{1}{x}\right) e^{x^2+1/x}$, puis

$$f''(x) = \left(2x^2 + 1 - \frac{1}{x}\right) \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) e^{x^2+1/x} + \left(4x + \frac{1}{x^2}\right) e^{x^2+1/x} = \left(4x^3 - 2 + 2x - \frac{1}{x^2} - 2 + \frac{1}{x^3} + 4x + \frac{1}{x^2}\right) e^{x^2+1/x}$$

$$= \left(4x^3 + 6x - 4 + \frac{1}{x^3}\right) e^{x^2+1/x}.$$
 Il existe alors une fonction ε telle qu'au voisinage de 1,

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon(x-1) = e^2 + e^2(x-1) + \frac{7}{2}e^2(x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon(x-1)$$
 avec $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x-1) = 0$.
3. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 1 est $y = f(1) + f'(1)(x-1)$. On calcule alors

$$f(x) - f(1) - f'(1)(x-1) = (x-1)^2 \left(\frac{7}{2} + \varepsilon(x-1)\right).$$
 Or $(x-1)^2 \geq 0$ et $\frac{7}{2} + \varepsilon(x-1) \geq 0$ au voisinage de 1 puisque $\lim_{x \rightarrow 1} \varepsilon(x-1) = 0$. Ainsi, au voisinage de 1, on a $f(x) \geq f(1) + f'(1)(x-1)$, et donc la courbe représentative de f est au-dessus de la tangente en 1 au voisinage de 1.
4. On a, pour tout $x \geq 1$, $4x^3 - 4 \geq 0$, $6x \geq 0$, $\frac{1}{x^3} \geq 0$ et $e^{x^2+1/x} \geq 0$. Il s'ensuit que

$$f''(x) = \left(4x^3 + 6x - 4 + \frac{1}{x^3}\right) e^{x^2+1/x} \geq 0$$
 pour tout $x \in [1, +\infty[$, et donc que f est convexe sur $[1, +\infty[$.

Exercice 2.37

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{(x-1)\ln(x-1) - x}{2x-2}$

1. Donner le domaine de définition de f . On admet que f est de classe \mathcal{C}^2 sur son domaine de définition.
2. Donner au point 2 un développement limité de f à l'ordre 2.

3. Préciser l'approximation affine de f au point 2 et donner la position relative de la tangente par rapport à la courbe représentative de f au voisinage de ce point.
4. Calculer l'élasticité de f sur son domaine de définition.
5. Donner une valeur approchée de la variation relative de f lorsque x diminue de 3% à partir de 2.
6. A partir de 2, de combien doit varier x pour que la valeur de $f(x)$ augmente de 5% ?

Corrigé

1. Le dénominateur s'annule en $x = 1$. De plus, $\ln(x - 1)$ est défini pour tout $x \in]1, +\infty[$. Le domaine de définition de f est donc $\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$.

2. On a, pour tout $x > 1$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln(x - 1) - \frac{x}{2(x - 1)}$. Par suite, pour tout $x > 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{2(x - 1)} - \frac{1}{2} \frac{(x - 1) - x}{(x - 1)^2} = \frac{1}{2(x - 1)} + \frac{1}{2(x - 1)^2}. \text{ Il vient alors}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2(x - 1)^2} - \frac{1}{2} \frac{2(x - 1)}{(x - 1)^4} = -\frac{1}{(x - 1)^3} - \frac{1}{2(x - 1)^2}. \text{ Il existe alors } \varepsilon \text{ telle qu'au voisinage de 2,}$$

$$f(x) = f(2) + f'(2)(x - 2) + \frac{f''(2)}{2}(x - 2)^2 + (x - 2)^2 \varepsilon(x - 2) = -1 + (x - 2) - \frac{3}{4}(x - 2)^2 + (x - 2)^2 \varepsilon(x - 2) \text{ avec}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \varepsilon(x - 2) = 0.$$

3. L'approximation affine de f au point 2 est donnée par $\widehat{f}_2(x) = f(2) + f'(2)(x - 2) = -1 + (x - 2)$. Au voisinage de 2, $f(x) - \widehat{f}_2(x) = (x - 2)^2 \left(-\frac{3}{4} + \varepsilon(x - 1) \right)$. Or $(x - 1)^2 \geq 0$ et $\left(-\frac{3}{4} + \varepsilon(x - 1) \right) \leq 0$ au voisinage de 2 puisque $\lim_{x \rightarrow 2} \varepsilon(x - 2) = 0$. Donc $f(x) - \widehat{f}_2(x) = 0$ au voisinage de 2, et la courbe représentative de f est en-dessous de la tangente en 2 au voisinage de 2.

4. Pour tout $x > 1$, $e_f(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}}{\frac{1}{(x-1)\ln(x-1)} - \frac{x}{2x-2}} = x \frac{1 + \frac{1}{(x-1)}}{(x-1)\ln(x-1) - x} = \frac{x^2}{(x-1)^2 \ln(x-1) - x(x-1)}$.

En particulier, $e_f(2) = -2$.

5. On rappelle que $\frac{\Delta f}{f} \simeq e_f(2) \frac{\Delta x}{x}$.

Ainsi, si x diminue de 3%, la variation relative de f est d'environ $-2 \times (-0.03) = 0.06$, soit une augmentation de 6%.

6. Inversement, $\frac{\Delta x}{x} \simeq \frac{1}{e_f(2)} \frac{\Delta f}{f} = -\frac{1}{2} \times 0.05 = -0.025$. Pour que f augmente de 5%, il faut que x diminue de 2.5%.

Fonctions de deux variables

Exercice 2.25

Soit la fonction f définie par $f(x, y) = xe^y + ye^x$.

1. Donner le domaine de définition \mathcal{D}_f de f . On admet que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D}_f .
2. Calculer les dérivées partielles premières de f en tout point de \mathcal{D}_f .
3. Déterminer l'équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(0, 0)$.
4. Déterminer la position relative du plan tangent et de la surface représentative de f au voisinage du point $(0, 0)$.
5. Étudier la convexité de f sur son ensemble de définition.
6. Donner une valeur approchée de $f(0.1, -0.2)$.
7. Soit $a > 0$. On se place au voisinage du point $A = (a, a)$. On suppose que les variables x et y augmentent toutes les deux de 5%, et que la variation correspondante de f est une augmentation de 10%. En utilisant un calcul approché, déterminer alors la valeur de a .

Corrigé

1. f est définie sur \mathbb{R}^2 .
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y + ye^x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^y + e^x$.
3. L'équation du plan tangent est donnée par $z = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0) = x + y$.
4. On calcule les dérivées partielles secondes : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = ye^x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = xe^y$,
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = e^x + e^y$. D'où en $(0, 0)$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$.
Ainsi en $(0, 0)$, $rt - s^2 = -4 < 0$. La surface représentative de f traverse le plan tangent en $(0, 0)$.
5. D'après ce qui précède, la fonction f n'est ni convexe ni concave sur \mathbb{R}^2 .
6. L'approximation affine au voisinage de $O = (0, 0)$ est donnée par $\hat{f}_O(x, y) = x + y$ d'après la question 3 (le plan tangent étant la surface représentative de l'approximation affine). Ainsi $f(0.1, -0.2) \simeq \hat{f}_O(0.1, -0.2) = 0.1 - 0.2 = -0.1$.
7. En $A = (a, a)$, on a $e_{f/x}(a, a) = \frac{a}{f(a, a)} \frac{\partial f}{\partial x}(a, a) = \frac{a}{2ae^a} (1 + a)e^a = \frac{1 + a}{2}$. De même,
 $e_{f/y}(a, a) = \frac{a}{f(a, a)} \frac{\partial f}{\partial y}(a, a) = \frac{1 + a}{2}$. Or on a $\frac{\Delta f}{f} \simeq e_{f/x}(a, a) \frac{\Delta x}{x} + e_{f/y}(a, a) \frac{\Delta y}{y}$ soit
 $0.1 = \frac{1 + a}{2} \times 0.05 + \frac{1 + a}{2} \times 0.05 = \frac{1 + a}{2} \times 0.1$. Il s'ensuit que $\frac{1 + a}{2} = 1$, donc $1 + a = 2$ et $a = 1$.

Exercice 2.26

Soit g la fonction à deux variables définie par $g(x, y) = \frac{\exp(x + y)}{\sqrt{x + y}}$.

1. Déterminer son domaine de définition \mathcal{D}_g . On admet qu'il est ouvert et que g est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{D}_g .
2. \mathcal{D}_g est-il convexe ?
3. Étudier la convexité de g sur son domaine de définition.
4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g sur \mathcal{D}_g .

- Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative de g en $(1, 0)$ et sa position relative par rapport à la surface représentative de g au voisinage de $(1, 0)$.

Corrigé

- Le dénominateur n'est défini que si $x + y \geq 0$, et il ne doit pas s'annuler ce qui interdit $x + y = 0$. On a donc $\mathcal{D}_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y > 0\}$.
- \mathcal{D}_g est convexe car c'est un demi-plan.
- Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_g$, $g(x, y) > 0$ et $\ln(g(x, y)) = x + y - \ln(\sqrt{x + y}) = x + y - \frac{1}{2} \ln(x + y)$.
Or $(x, y) \mapsto x + y$ est convexe car c'est une fonction affine. $(x, y) \mapsto -\frac{1}{2} \ln(x + y)$ est convexe car c'est la composée d'une fonction affine par la fonction $-\frac{1}{2} \ln(\cdot)$ qui est convexe. Par la propriété d'addition, $\ln \circ g$ est convexe sur \mathcal{D}_g , et g est par conséquent aussi convexe sur \mathcal{D}_g .
- On a, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_g$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\exp(x + y)\sqrt{x + y} - \exp(x + y)\frac{1}{2\sqrt{x + y}}}{(\sqrt{x + y})^2} = \frac{(2x + 2y - 1)\exp(x + y)}{2(x + y)^{3/2}}$$
 et de même,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\exp(x + y)\sqrt{x + y} - \exp(x + y)\frac{1}{2\sqrt{x + y}}}{(\sqrt{x + y})^2} = \frac{(2x + 2y - 1)\exp(x + y)}{2(x + y)^{3/2}}.$$
- Le plan tangent en $(1, 0)$ a pour équation

$$z = f(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial x}(1, 0)(x - 1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1, 0)(y - 0) = e + \frac{e}{2}(x - 1) + \frac{e}{2}y.$$

La fonction g étant convexe, la surface représentative de g est au-dessus du plan tangent au voisinage de $(1, 0)$.

Exercice 2.27

On considère la fonction de deux variables f définie par $f(x, y) = \frac{y^2}{2y - x^2}$.

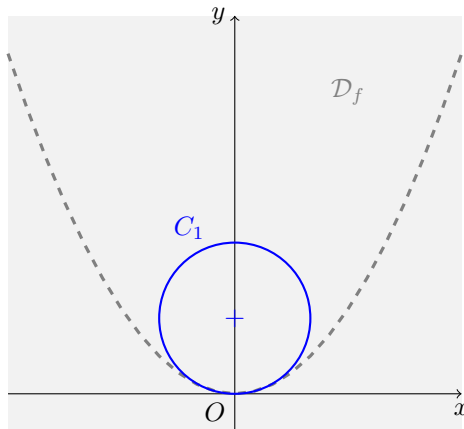
- Déterminer et représenter son ensemble de définition \mathcal{D}_f . On admet qu'il est ouvert. Est-il convexe ?
- Déterminer et représenter la courbe de niveau C_k pour $k = 1$.
- Calculer les dérivées partielles du premier ordre de la fonction f sur \mathcal{D}_f .
- Écrire le développement limité de f à l'ordre 1 au point $(2, 3)$. En déduire une valeur approchée de f au point $(2.2, 2.9)$.
- Calculer les dérivées partielles du second ordre de la fonction f sur \mathcal{D}_f . Vérifier que

$$D^2 f(2, 3) = \begin{pmatrix} 81/2 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$$

- Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(2, 3)$. En déduire l'équation du plan tangent et la position de celui-ci par rapport à la surface représentative de f au point $(2, 3)$.

Corrigé

- Le dénominateur ne doit pas s'annuler, f est donc définie sur $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2y - x^2 \neq 0\}$. Il s'agit du plan \mathbb{R}^2 privé du graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$. Cet ensemble n'est pas convexe : il contient les points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ mais pas leur milieu $(0, 0)$.



2. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x, y) = 1 \Leftrightarrow y^2 = 2y - x^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$. On reconnaît l'équation du cercle de centre $(0, 1)$ et de rayon 1. La courbe de niveau 1 de f est donc ce cercle privé du point $(0, 0)$ qui n'est pas dans le domaine de définition.

3. $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^2}{(2y - x^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y(2y - x^2) - 2y^2}{(2y - x^2)^2} = \frac{2y^2 - 2yx^2}{(2y - x^2)^2}$.

4. On a $f(2, 3) = \frac{9}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 9$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = -\frac{3}{2}$. D'où le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $(2, 3)$:

$$f(x, y) = \frac{9}{2} + 9(x - 2) - \frac{3}{2}(y - 3) + \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} \varepsilon(x - 2, y - 3) \text{ avec } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 3}} \varepsilon(x - 2, y - 3) = 0.$$

En négligeant le terme d'erreur, on a alors $f(2.2, 2.9) \simeq \frac{9}{2} + 9(2.2 - 2) - \frac{3}{2}(2.9 - 3) = 6.15$.

5. On calcule, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2y^2(2y - x^2)^2 - 2xy^2 \times (-4x)(2y - x^2)}{(2y - x^2)^4} = \frac{4y^3 + 6x^2y^2}{(2y - x^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{4xy(2y - x^2)^2 - 2xy^2 \times 4(2y - x^2)}{(2y - x^2)^4} = \frac{-4x^3y}{(2y - x^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{(4y - 2x^2)(2y - x^2)^2 - (2y^2 - 2yx^2) \times 4(2y - x^2)}{(2y - x^2)^4} = \frac{2x^4}{(2y - x^2)^3}.$$

On a bien $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 3) = \frac{81}{2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, 3) = -12$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 3) = 4$.

6. Le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $(2, 3)$ s'écrit alors $f(x, y) = \frac{9}{2} + 9(x - 2) - \frac{3}{2}(y - 3) + \frac{81}{4}(x - 2)^2 - 12(x - 2)(y - 3) + 2(y - 3)^2 + ((x - 2)^2 + (y - 3)^2)\varepsilon(x - 2, y - 3)$

avec $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 3}} \varepsilon(x - 2, y - 3) = 0$. Le plan tangent en $(2, 3)$ a pour équation $z = \frac{9}{2} + 9(x - 2) - \frac{3}{2}(y - 3)$. De plus, en

$(2, 3)$ on a $rt - s^2 = \frac{81}{2} \times 4 - (-12)^2 = 162 - 144 = 18 > 0$, et $t = 4 > 0$. La surface représentative de f est donc au-dessus du plan tangent au voisinage de $(2, 3)$.

Exercice 2.41

Soit la fonction f définie par $f(x, y) = (x + y - 2)^2 + \exp(x^2 - 2y^2 - xy)$.

1. Donner le domaine de définition de f . On admet que c'est un ouvert et que f est de classe \mathcal{C}^2 sur son ensemble de définition.
2. En tout point du domaine de définition donner les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f .

3. Donner le développement limité à l'ordre 2 de f au point $(2, 1)$.
4. Donner l'équation du plan tangent en $(2, 1)$ et sa position relative par rapport à la surface représentative de f au voisinage du point $(2, 1)$.
5. Au point $(2, 1)$, on suppose que f et x augmentent relativement de 5%. Quelle est approximativement la variation relative de y correspondante ?
6. Donner une approximation de $f(1.9, 1.2)$.
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = f(x, x) - 4(x - 1)^2$. Donner les extrema locaux de g et préciser s'ils sont globaux.

Corrigé :

1. La fonction f est définie sur \mathbb{R}^2 .
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(x + y - 2) + (2x - y) \exp(x^2 - 2y^2 - xy)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(x + y - 2) - (4y + x) \exp(x^2 - 2y^2 - xy)$. Calculons les dérivées partielles secondes. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 + [2 + (2x - y)^2] \exp(x^2 - 2y^2 - xy)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 + [-4 + (4y + x)^2] \exp(x^2 - 2y^2 - xy)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 - [1 + (2x - y)(4y + x)] \exp(x^2 - 2y^2 - xy)$.
3. Au point $(2, 1)$, on a $\exp(2^2 - 2 \times 1^2 - 2 \times 1) = \exp(0) = 1$, d'où $f(2, 1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 5$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -4$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 1) = 13$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 1) = -14$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 1) = 23$.
Le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de $(2, 1)$ s'écrit alors $f(x, y) = 2 + 5(x - 2) - 4(y - 1) + \frac{13}{2}(x - 2)^2 - 14(x - 2)(y - 1) + \frac{23}{2}(y - 1)^2 + ((x - 2)^2 + (y - 1)^2)\varepsilon(x - 2, y - 1)$ avec $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \varepsilon(x - 2, y - 1) = 0$.
4. Le plan tangent en $(2, 1)$ a alors pour équation $z = 2 + 5(x - 2) - 4(y - 1)$. De plus en $(2, 1)$ on a $rt - s^2 = 13 \times 23 - (-14)^2 = 103 > 0$, et $r = 13 > 0$. La courbe représentative de f est donc au-dessus du plan tangent au voisinage de $(2, 1)$.
5. On a $e_{f/x}(2, 1) = \frac{2}{f(2, 1)} \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 5$, $e_{f/y}(2, 1) = \frac{1}{f(2, 1)} \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -2$. Or on a $\frac{\Delta f}{f} = e_{f/x}(2, 1) \frac{\Delta x}{x} + e_{f/y}(2, 1) \frac{\Delta y}{y}$ soit $0.05 = 5 \times 0.05 - 2 \times \frac{\Delta y}{y}$. Il s'ensuit $\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{2}(5 \times 0.05 - 0.05) = 0.1$, y augmente donc de 10%.
6. L'approximation affine de f au voisinage de $(2, 1)$ est donnée par $\hat{f}_{(2,1)} = 2 + 5(x - 2) - 4(y - 1)$. D'où $f(1.9, 1.2) \simeq \hat{f}_{(2,1)}(1.9, 1.2) = 2 + 5 \times (-0.1) - 4 \times 0.2 = 0.7$.
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (x + x - 2)^2 + \exp(x^2 - 2x^2 - x^2) - 4(x - 1)^2 = \exp(-2x^2)$. On a alors $g'(x) = -4x \exp(-2x^2)$ et celle-ci ne s'annule qu'en 0, g admet donc 0 pour seul point critique. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-2x^2 \leq 0$ donc comme la fonction exponentielle est croissante, $g(x) = \exp(-2x^2) \leq \exp(0) = g(0)$. Cela prouve que g a un maximum global en 0, de valeur $g(0) = 1$.

Exercice 2.42

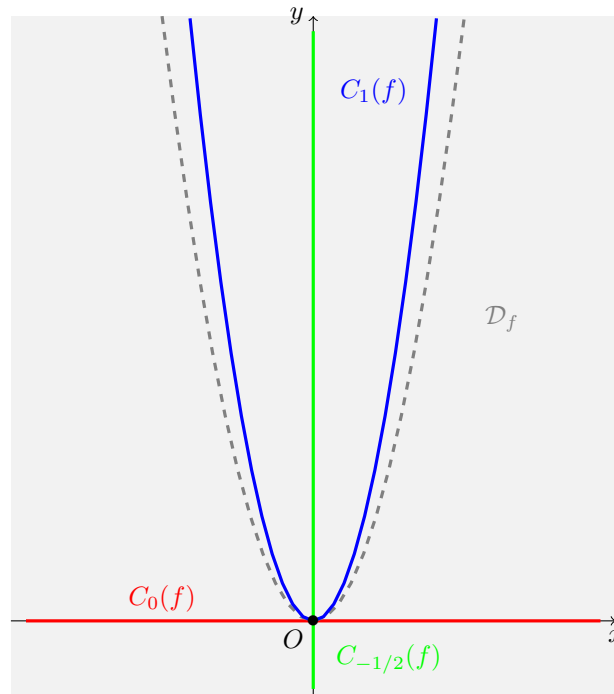
On considère la fonction réelle de deux variables définie par $f(x, y) = \frac{x^2}{y - 2x^2}$.

1. Déterminer et représenter son ensemble de définition \mathcal{D}_f . On admet que cet ensemble est ouvert. Est-il convexe ? On admet que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{D}_f .
2. Représenter sur le même dessin que la question 1 les courbes de niveau $C_1(f), C_{-1/2}(f)$ et $C_0(f)$.
3. En tout point de \mathcal{D}_f , calculer le gradient de f .

4. Écrire le développement limité à l'ordre 1 de f au point $(1,1)$. En déduire une valeur approchée de f au point $(0.9, 1.1)$.

Corrigé

1. La fonction f est définie en tout point où son dénominateur ne s'annule pas, c'est à dire sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 2x^2\}$. Il s'agit du plan \mathbb{R}^2 privé du graphe de la fonction $x \mapsto 2x^2$.



2. • Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x, y) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y - 2x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = y - 2x^2 \Leftrightarrow y = 3x^2$. La courbe de niveau 1 de f est donc le graphe de la fonction $x \mapsto 3x^2$, privé du point $(0, 0)$ qui n'est pas dans \mathcal{D}_f .
- Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x, y) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2}(y - 2x^2) \Leftrightarrow -2x^2 = y - 2x^2 \Leftrightarrow y = 0$. La courbe de niveau $-1/2$ de f est donc la droite d'équation $y = 0$, privée du point $(0, 0)$ qui n'est pas dans \mathcal{D}_f .
- Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. La courbe de niveau 0 de f est donc la droite d'équation $x = 0$, privée du point $(0, 0)$ qui n'est pas dans \mathcal{D}_f .

3. Soit $(x, y) \in \mathcal{D}_f$. On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x(y - 2x^2) - x^2 \times (-4x)}{(y - 2x^2)^2} = \frac{2xy}{(y - 2x^2)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-x^2}{(y - 2x^2)^2}$. D'où $\nabla f(x, y) = \left(\frac{2xy}{(y - 2x^2)^2}, \frac{-x^2}{(y - 2x^2)^2} \right)$.

4. On a alors $f(1, 1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = -1$.

Le développement limité à l'ordre 1 de f s'écrit alors, pour (x, y) proche de $(1, 1)$,

$$f(x, y) = 1 + 2(x - 1) - (y - 1) + \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} \varepsilon(x - 1, y - 1)$$

avec $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \varepsilon(x - 1, y - 1) = 0$.

Si on néglige le terme d'erreur, on a alors $f(0.9, 1.1) \simeq 1 + 2(0.9 - 1) - (1.1 - 1) = 0.7$.

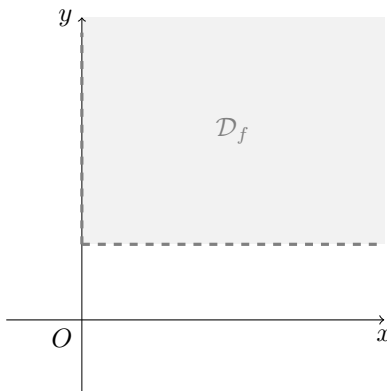
Exercice 2.44

Soit la fonction f définie par $f(x, y) = (y - 1) \ln(y - 1) - \ln(x) + x^2 - xy + 2y^2 - 7y - \frac{3}{2}x + 3$.

1. Donner le domaine de définition \mathcal{D}_f de f et faire un dessin de cet ensemble.
2. L'ensemble \mathcal{D}_f est-il convexe ? Est-il ouvert ?
3. Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto u \ln(u)$ est convexe sur son ensemble de définition.
4. En déduire la convexité de f sur \mathcal{D}_f .
5. Montrer que $(2, 2)$ est un point critique.
6. En déduire la nature de $(2, 2)$.
7. La fonction f admet-elle un maximum global sur \mathcal{D}_f ?

Corrigé

1. Les quantités à l'intérieur des logarithmes doivent être strictement positives. f est donc définie sur $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 1\}$.



2. \mathcal{D}_f est convexe et ouvert car c'est l'intersection de deux demi-plans ouverts.
3. La fonction φ est définie sur $]0, +\infty[$. Pour tout $u \in]0, +\infty[$, on a $\varphi'(u) = u \times \frac{1}{u} + \ln(u) = 1 + \ln(u)$ qui est une fonction croissante, φ est donc convexe sur $]0, +\infty[$.
4. Par composition d'une fonction convexe par une fonction affine, $(x, y) \mapsto (y - 1) \ln(y - 1) = \varphi(y - 1)$ est convexe sur \mathcal{D}_f . De plus, par application du critère de convexité des fonctions polynomiales de degré 2, la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - xy + 2y^2 - yy - \frac{3}{2}x + 3$ est convexe sur \mathcal{D}_f (car $4ac - b^2 = 4 \times 1 \times 2 - (-1)^2 = 3 > 0$ et $a = 1 > 0$). Enfin, la fonction $-\ln$ étant convexe, la fonction $(x, y) \mapsto -\ln(x)$ est convexe d'après la propriété d'extension. La fonction f est une somme de fonctions convexes, elle est par conséquent convexe sur \mathcal{D}_f .
5. On calcule, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x} + 2x - y - \frac{3}{2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (y - 1) \times \frac{1}{y - 1} + \ln(y - 1) - x + 4y - 7 = \ln(y - 1) - x + 4y - 6$.
On vérifie que $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 2) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 2) = 0$, $(2, 2)$ est donc un point critique de f .
6. La fonction f étant convexe sur \mathcal{D}_f , elle admet un minimum global en $(2, 2)$.
7. La fonction f n'admet pas de maximum global sur \mathcal{D}_f : en effet, pour tout $x > 0$, $f(x, 2) = x^2 - \frac{7}{2}x + 11 - \ln(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 2) = +\infty$ (par croissances comparées).

Exercice 2.51

Une firme (en situation de monopole) produit un unique bien qui peut être vendu à deux clients a et b . Si la firme produit la quantité Q_a d'unités de bien pour le client a , alors celui-ci est disposé à payer le prix unitaire de $50 - 5Q_a$. Si la firme produit la quantité Q_b d'unités de bien pour le client b , alors celui-ci est disposé à payer le prix unitaire de $100 - 10Q_b$. Le coût pour la firme de produire Q unités de bien est $90 + 20Q$.

1. Que représente la fonction Π définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par l'expression ci-dessous ?

$$\Pi(Q_a, Q_b) = Q_a(50 - 5Q_a) + Q_b(100 - 10Q_b) - (90 + 20(Q_a + Q_b))$$

2. Si la firme veut maximiser son profit, quelle quantité de bien doit-elle produire et vendre à chaque client ? Calculer alors le profit maximal.

Corrigé

1. La fonction Π donne le profit de l'entreprise en fonction des quantités produites et vendues à chaque client.
2. On peut réécrire $\Pi(Q_a, Q_b) = -5Q_a^2 - 10Q_b^2 + 30Q_a + 80Q_b - 90$. On voit ainsi que Π est une fonction concave (en appliquant par exemple le critère sur les fonctions quadratiques, ou comme somme de deux fonctions concaves (par le lemme d'extension) et d'une fonction affine qui est donc aussi concave). Tout point critique de Π sera donc un point où Π a un maximum global. Déterminons les points critiques.

On a $\frac{\partial \Pi}{\partial Q_a}(Q_a, Q_b) = -10Q_a + 30$, $\frac{\partial \Pi}{\partial Q_b}(Q_a, Q_b) = -20Q_b + 80$.

Les deux dérivées partielles s'annulent en $Q_a = 3, Q_b = 4$. Ce sont donc les quantités à produire pour maximiser le profit. Le profit maximal vaut alors $\bar{\Pi} = -5 \times 3^2 - 10 \times 4^2 + 30 \times 3 + 80 \times 4 - 90 = 115$.

Exercice 2.52

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = (x^2 + y^2) \exp(-x)$. On admet qu'elle est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .

1. Trouver les extrema locaux de f sur \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que f possède un minimum global sur \mathbb{R}^2 et qu'elle ne possède pas de maximum global.

Corrigé

1. Calculons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f . Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \exp(-x) - (x^2 + y^2) \exp(-x) = (2x - x^2 - y^2) \exp(-x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \exp(-x)$ puis
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (2 - 2x) \exp(-x) - (2x - x^2 - y^2) \exp(-x) = (x^2 + y^2 - 4x + 2) \exp(-x)$,
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2y \exp(-x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \exp(-x)$.

Cherchons maintenant les points critiques. On a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2y \exp(-x) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ car l'exponentielle ne s'annule pas.}$$

Il s'ensuit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Leftrightarrow (2x - x^2 - y^2) \exp(-x) = 0 \Leftrightarrow x(2 - x) = 0 \text{ car } y = 0$.

Les points critiques sont donc $(0, 0)$ et $(-2, 0)$. On applique les conditions du second ordre pour déterminer la nature des points critiques.

- En $(0, 0)$:
 $r = (2^2 + 0^2 - 4 \times 0 + 2) \exp(-0) = 2, s = -2 \times 0 \exp(-0) = 0, t = 2 \exp(-0) = 2$.
 On a alors $rt - s^2 = 2 \times 2 - 0^2 = 4 > 0$. De plus, $r = 2 > 0$. f possède donc un minimum local en $(0, 0)$.
- En $(-2, 0)$:
 $r = (2^2 + 0^2 - 4 \times 2 + 2) e^{-2} = -2e^{-2}, s = -2 \times 0 e^{-2} = 0, t = 2e^{-2}$.
 On a alors $rt - s^2 = -4e^{-4} < 0$. f a donc un point selle en $(-2, 0)$.
- On a $f(0, 0) = 0$, et on a clairement $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. f a donc un minimum global en $(0, 0)$. f n'a en revanche pas de maximum global. En effet, si elle en avait un, celui-ci serait atteint en un point critique, or aucun des deux points critiques ne donne de maximum local pour f , donc a fortiori pas de maximum global.

Exercice 1.68

Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x, y) = xy \quad g(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Pour chacune des questions suivantes, on utilisera deux méthodes pour la résolution du problème d'optimisation sous contrainte : d'abord en explicitant la contrainte, puis en utilisant le Lagrangien.

1. Déterminer les extrema de f sur \mathbb{R}^2 puis sous la contrainte $g(x, y) = \frac{2}{3}$.
2. Déterminer les extrema de g sur \mathcal{D}_g puis sous la contrainte $f(x, y) = 9$.

Corrigé

1. Optimisation de f sur \mathbb{R}^2 (qui est ouvert). Commençons par déterminer les points critiques. On résout le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

f possède donc un seul point critique qui est $(0, 0)$. Déterminons sa nature. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$. D'où en $(0, 0)$, on a $rt - s^2 = 0 \times 0 - 1^2 = -1 < 0$. La fonction f a donc un point-col en $(0, 0)$, et f n'a pas d'extrema locaux sur \mathbb{R}^2 .

Optimisation de f sous contrainte explicite. La contrainte $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}$ impose $x \neq 0, y \neq 0$ ainsi que $x \neq \frac{3}{2}, y \neq \frac{3}{2}$ (car la contrainte ne peut pas être vérifiée si x ou y prend la valeur $\frac{3}{2}$) et se réécrit $\frac{1}{y} = \frac{2}{3} - \frac{1}{x}$. Il s'ensuit $y = \frac{1}{\frac{2}{3} - \frac{1}{x}} = \frac{3x}{2x-3}$. On pose donc $F(x) = f\left(x, \frac{3x}{2x-3}\right) = \frac{3x^2}{2x-3}$. Pour tout $x \notin \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$, on a $F'(x) = \frac{6x(2x-3) - 2 \times 3x^2}{(2x-3)^2} = \frac{6x^2 - 18x}{(2x-3)^2} = \frac{6x(x-3)}{(2x-3)^2}$. La fonction F' s'annule en $x = 0$ ou $x = 3$, mais le cas $x = 0$ est exclus ; la fonction F possède donc un seul point critique qui est $x = 3$. Déterminons sa nature. Pour tout $x \notin \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$, on a $F''(x) = 6 \frac{(2x-3)(2x-3)^2 - (x^2-3x) \times 2 \times (2x-3)}{(2x-3)^4} = \frac{54}{(2x-3)^3}$. On a donc $F''(3) = \frac{54}{3^3} = \frac{54}{27} > 0$. La fonction F possède donc un minimum local en 3. La valeur correspondante de y est $y = \frac{3 \times 3}{2 \times 3 - 3} = 3$. La fonction f possède donc un minimum local sous la contrainte en $(3, 3)$, de valeur $f(3, 3) = 9$.

Optimisation de f sous contrainte avec le Lagrangien : Posons $h(x, y) = g(x, y) - \frac{2}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{3}$ et cherchons les points critiques de seconde espèce. On résout

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \nabla h(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \left(\frac{-1}{x^2}, \frac{-1}{y^2}\right) = (0, 0)$$

ce qui n'est possible pour aucune valeur de (x, y) , il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce. Cherchons les points critiques de première espèce. On résout

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \\ h(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{\lambda}{x^2} \\ x = -\frac{\lambda}{y^2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $xy^2 = x^2y (= -\lambda)$. Comme $x \neq 0, y \neq 0$, il s'ensuit $x = y$. La troisième équation donne alors $\frac{2}{x} = \frac{2}{3}$ d'où $x = 3$ puis $y = 3$, et $\lambda = -x^2y = -27$. Il y a donc un seul point critique

de première espèce, (3, 3) avec $\lambda = -27$. Déterminons sa nature à l'aide du Lagrangien. Pour tous x, y, λ , on a $\mathcal{L}_\lambda(x, y) = xy - \lambda \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{3} \right)$, d'où

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\lambda}{\partial x}(x, y) = y + \frac{\lambda}{x^2}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_\lambda}{\partial y}(x, y) = x + \frac{\lambda}{y^2}$$

puis

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_\lambda}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{2\lambda}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}_\lambda}{\partial x \partial y}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}_\lambda}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{2\lambda}{y^3}$$

d'où $rt - s^2 = \frac{4\lambda^2}{x^2 y^2} - 1$, soit en (3, 3), $rt - s^2 = 35 > 0$. De plus, en (3, 3), $r = \frac{-2 \times (-27)}{3^2} = 6 > 0$, f possède donc sous la contrainte un minimum local en (3, 3), de valeur $f(3, 3) = 9$.

2. Optimisation de g sur \mathcal{D}_g . On a $\mathcal{D}_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0, y \neq 0\}$ et cet ensemble est ouvert. Cherchons les points critiques de g . Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_g$,

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{x^2} = 0 \\ \frac{-1}{y^2} = 0 \end{cases}$$

et ce système n'a pas de solutions. La fonction g n'a donc pas de points critiques, et pas d'extrema locaux sur \mathcal{D}_g .

Optimisation de g sous contrainte explicite. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}_g$, la contrainte $xy = 9$ se réécrit $y = \frac{9}{x}$ (car $x \neq 0$). On pose, pour tout $x \neq 0$, $G(x) = g\left(x, \frac{9}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{x}{9}$. Cherchons ses points critiques. Pour tout $x \neq 0$, $G'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{9}$ et cette fonction s'annule en $x = -3$ et $x = 3$.
De plus, pour tout $x \neq 0$, $G''(x) = \frac{2}{x^3}$, d'où $G''(-3) < 0$, $G''(3) > 0$. La fonction G possède donc un maximum local en -3 et un minimum local en 3 . Par conséquent, sous la contrainte, la fonction g admet un maximum local en $(-3, -3)$, de valeur $-\frac{2}{3}$, et un minimum local en $(3, 3)$, de valeur $\frac{2}{3}$.

Optimisation de g sous contrainte avec le Lagrangien : Posons $h(x, y) = xy - 9$ et cherchons les points critiques de seconde espèce. On résout

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \nabla h(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (y, x) = (0, 0)$$

Ceci n'est possible que pour $x = y = 0$, mais le point $(0, 0)$ ne satisfait pas la contrainte ($0 \times 0 \neq 9$). Il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce. Cherchons les points critiques de première espèce. On résout

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \\ h(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{x^2} = \lambda y \\ -\frac{1}{y^2} = \lambda x \\ xy = 9 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $\lambda y x^2 = \lambda x y^2 = -1$. Cela impose $\lambda \neq 0$, puis comme $x \neq 0$ et $y \neq 0$, il s'ensuit $x = y$. La troisième équation donne alors $x^2 = 9$, donc $x = \pm 3$, par suite $y = x = \pm 3$ et $\lambda = -\frac{1}{x^2 y} = \mp \frac{1}{27}$.

Il y a donc deux points critiques de première espèce : $(-3, -3)$ avec $\lambda = \frac{1}{27}$ et $(3, 3)$ avec $\lambda = -\frac{1}{27}$. Déterminons leur nature à l'aide du Lagrangien.

Pour tous x, y, λ , on a $\mathcal{L}_\lambda(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \lambda(xy - 9)$, d'où

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\lambda}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x^2} - \lambda y, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_\lambda}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{y^2} - \lambda x$$

puis

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_\lambda}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}_\lambda}{\partial x \partial y}(x, y) = -\lambda, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}_\lambda}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2}{y^3}$$

d'où $rt - s^2 = \frac{4}{x^3 y^3} - \lambda^2$. Ainsi en $(-3, -3)$ et en $(3, 3)$, $rt - s^2 = \frac{4}{27^2} - \frac{1}{27^2} > 0$. De plus, en $(-3, -3)$, $r = \frac{-2}{27} < 0$ et en $(3, 3)$, $r = \frac{2}{27} > 0$. La fonction g possède donc sous la contrainte un maximum local en $(-3, -3)$ de valeur $g(-3, -3) = -\frac{2}{3}$ et un minimum local en $(3, 3)$, de valeur $g(3, 3) = \frac{2}{3}$.

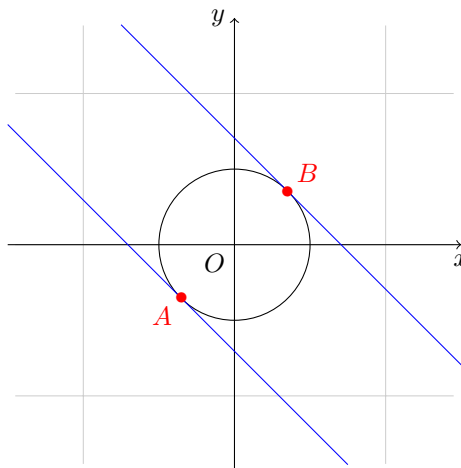
Exercice 1.69

Déterminer les extrema (locaux et globaux) des fonctions f suivantes sur leur domaine de définition sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

1. $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = \exp\left(x^2 + y^2 - \frac{1}{4}\right) - 1$ (on fera également une résolution graphique).
2. $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$ (on fera également une résolution graphique).
3. $f(x, y) = x^3 + y^2$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
5. $f(x, y) = \ln(x - y)$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$.
6. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} - 1$.
8. $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $g(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2}$.

Corrigé

1. • Commençons par la résolution graphique. Il nous faut d'abord représenter l'ensemble des points qui satisfont la contrainte. Or, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\exp\left(x^2 + y^2 - \frac{1}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. L'ensemble des points qui satisfont la contrainte est donc le cercle de centre $O(0, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.
Maintenant, pour $k \in \mathbb{R}$, la courbe de niveau k de f est l'ensemble des points (x, y) tels que $x + y = k$ soit $y = -x + k$: c'est donc la droite de coefficient directeur -1 et d'ordonnée à l'origine k . Il nous faut déterminer graphiquement les plus grande et plus petite valeurs de k telles que ces droites intersectent le cercle précédent. Les tracés correspondants sont donnés ci-dessous :



On constate que la plus grande valeur de k telle que la droite d'équation $y = -x + k$ intersecte le cercle semble être $k \simeq 0.7$, et le maximum correspondant est atteint au point B de coordonnées approximatives $(0.35, 0.35)$. De même, la plus petite valeur de k telle que la droite d'équation $y = -x + k$ intersecte le cercle semble être $k \simeq -0.7$, et le minimum correspondant est atteint au point A de coordonnées approximatives $(-0.35, -0.35)$.

- Vérifions cela par une résolution analytique.

On a vu que la contrainte pouvait se réécrire $x^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0$, on pose donc $g(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{1}{4}$. Commençons par chercher les points critiques de seconde espèce :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \nabla g(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x, 2y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

mais le point $(0, 0)$ ne satisfait pas la contrainte $g(x, y) = 0$. Il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce. Cherchons les points critiques de première espèce, en résolvant le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $2\lambda x = 2\lambda y$, donc $\lambda = 0$ ou $x = y$. Mais $\lambda = 0$ est impossible (car la première équation donne alors $1 = 0$), donc $x = y$. La troisième équation donne alors $2x^2 = \frac{1}{4}$ soit $x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Il s'ensuit $y = x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et d'après la première équation, $\lambda = \frac{1}{2x} = \pm\sqrt{2}$.

Il y a donc deux points critiques de première espèce :

$$A = \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \text{ (avec } \lambda = -\sqrt{2} \text{)} \text{ et } B = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \text{ (avec } \lambda = \sqrt{2} \text{)}.$$

De plus, l'ensemble des points qui satisfont la contrainte est compact (c'est un cercle, il est donc fermé et borné).

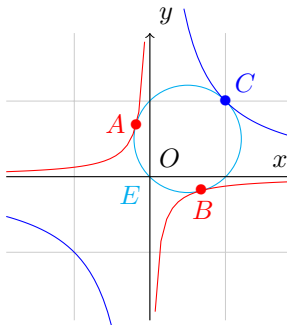
La fonction f y admet donc un minimum global et un maximum global, qui sont nécessairement atteints en des points critiques. Comme $f(A) = \frac{-1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}} = f(B)$, la fonction f possède donc sous la contrainte un minimum

global en A et un maximum global en B , de valeurs respectives $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. f et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

L'ensemble E des points satisfaisant la contrainte est donc le cercle de centre $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour optimiser f sous la contrainte de façon géométrique, il faut déterminer les plus petit et plus grand $k \in \mathbb{R}$ tels que la courbe de niveau k de f coupe l'ensemble E , ou encore que cette courbe de niveau soit tangente au cercle. Or, pour $k \neq 0$, la courbe de niveau k est l'hyperbole d'équation $y = \frac{k}{x}$. On constate géométriquement qu'il semble y avoir deux valeurs de k pour lesquelles l'hyperbole est tangente au cercle (courbes rouge et bleue).



Vérifions par le calcul le résultat obtenu.

- On cherche les points critiques de seconde espèce. On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \nabla g(x, y) = (2x - 1, 2y - 1)$ qui ne s'annule qu'en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Or ce point ne satisfait pas la contrainte $g(x, y) = 0$. Il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce.

- Cherchons les points critiques de première espèce.

On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}(x, y) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - x - y)$.

$$\text{Résolvons } \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \lambda(2x - 1) = 0 \quad (1) \\ x - \lambda(2y - 1) = 0 \quad (2) \\ x^2 + y^2 - x - y = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Effectuer (1) - (2) donne $(y - x)(1 + 2\lambda) = 0$, donc $1 + 2\lambda = 0$ ou $y - x = 0$.

Si $1 + 2\lambda = 0$, soit $\lambda = -\frac{1}{2}$, les relations (1) et (2) se réécrivent $y = \frac{1}{2} - x$.

La troisième relation s'écrit alors $x^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - x - \left(\frac{1}{2} - x\right) = 0$ soit $2x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$.

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 3 > 0$. Il y a donc deux racines, $x_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}$

et $x_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$. On en déduit $y_1 = \frac{1}{2} - x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$ et $y_2 = \frac{1}{2} - x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}$.

Si $\lambda \neq -\frac{1}{2}$, alors $x = y$. La relation (3) se réécrit alors $2x^2 - 2x = 0$ soit $x(x - 1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$, et par suite $y = 0$ ou $y = 1$, avec respectivement $\lambda = 0$ ou $\frac{-\lambda}{1 - 2\lambda} = 1$ soit $\lambda = 1$.

Il y a donc quatre points critiques : $A = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{4}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right)$ (avec $\lambda = -\frac{1}{2}$), $B = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4}\right)$ (avec $\lambda = -\frac{1}{2}$), $O = (0, 0)$ (avec $\lambda = 0$) et $C = (1, 1)$ (avec $\lambda = 1$).

- Déterminons la nature des points critiques. On remarque que E est compact (il est fermé, et borné car inclus dans la boule fermée de centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et de rayon $1/\sqrt{2}$). Comme f est continue, elle admet un minimum global et un maximum global sur E . Or on a $f(A) = f(B) = -\frac{1}{8}$, $f(O) = 0$ et $f(C) = 1$. f a donc un minimum global en A et B et un maximum global en D (ce qui confirme ce qui avait été observé géométriquement). On constate par ailleurs (toujours géométriquement) que f est de signe négatif au voisinage de O sous la contrainte, et $f(O) = 0$: f a donc un maximum local en O sous la contrainte.

3. On cherche d'abord les points critiques de seconde espèce.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \nabla g(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x, 2y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

mais le point $(0, 0)$ ne satisfait pas la contrainte $g(x, y) = 0$. Il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce. Cherchons les points critiques de première espèce, en résolvant le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = 2\lambda x \\ 3y^2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

La première équation se réécrit $x(3x - 2\lambda) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}\lambda$. De même, la seconde équation donne $y = 0$ ou $y = \frac{2}{3}\lambda$. Le cas $x = y = 0$ n'est pas possible car la troisième équation n'est pas satisfaite. Il reste donc trois possibilités :

- $x = 0$, ce qui donne $y = \pm 1$ (d'après la troisième équation) puis $\lambda = \pm \frac{3}{2}$.
- $y = 0$, ce qui donne $x = \pm 1$ (d'après la troisième équation) puis $\lambda = \pm \frac{3}{2}$.
- $x = y = \frac{2}{3}\lambda$. La troisième équation donne alors $\left(\frac{2}{3}\lambda\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\lambda\right)^2 = 1$ soit $\lambda = \pm \frac{3}{2\sqrt{2}}$, et il s'ensuit $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Il y a donc six points critiques de première espèce : $A_1 = (-1, 0)$ (avec $\lambda = -\frac{3}{2}$), $A_2 = (1, 0)$ (avec $\lambda = \frac{3}{2}$), $A_3 = (0, -1)$ (avec $\lambda = -\frac{3}{2}$), $A_4 = (0, 1)$ (avec $\lambda = \frac{3}{2}$), $A_5 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (avec $\lambda = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$), $A_6 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (avec $\lambda = \frac{3}{2\sqrt{2}}$). Déterminons leur nature.

On remarque d'abord que l'ensemble des points qui satisfont la contrainte est compact (c'est un cercle, il est donc fermé et borné), f possède donc un minimum global et un maximum global sous la contrainte. Or $f(A_1) = f(A_3) = -1$, $f(A_2) = f(A_4) = 1$, $f(A_5) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(A_6) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La plus petite (respectivement plus grande) valeur de f est atteinte en A_1 et A_3 (respectivement A_2 et A_4) ; f admet donc sous la contrainte un minimum global en A_1

et A_3 , de valeur -1 , et un maximum global en A_2 et A_4 , de valeur 1 . Les autres points critiques ne peuvent donner, au mieux, que des extrema locaux. Étudions leur nature à l'aide du Lagrangien. Pour tous $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}_\lambda(x, y) = x^3 + y^3 - \lambda(x^2 + y^2)$, d'où

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\lambda}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 2\lambda x \quad \frac{\partial \mathcal{L}_\lambda}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 2\lambda y$$

puis

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_\lambda}{\partial x^2}(x, y) = 6x - 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}_\lambda}{\partial x \partial y}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}_\lambda}{\partial y^2}(x, y) = 6y - 2\lambda$$

Ainsi en (x, y) , on a $rt - s^2 = (6x - 2\lambda)(6y - 2\lambda)$. En remplaçant x, y et λ par les valeurs correspondantes en A_5 et A_6 , on trouve les valeurs suivantes. En A_5 , $rt - s^2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 > 0$ et $r = -\frac{3}{\sqrt{2}} < 0$, f a donc sous la contrainte un maximum local en A_5 , de valeur $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. En A_6 , $rt - s^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 > 0$ et $r = \frac{3}{\sqrt{2}} > 0$, f a donc sous la contrainte un minimum local en A_6 , de valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. f et g sont définies et de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y > 0\}$.

- Recherchons les points critiques de seconde espèce. On a, pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ qui ne s'annule qu'en le point $(0, 0)$. Mais celui-ci ne satisfait pas la contrainte $g(x, y) = 0$, il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce.
- Recherchons les points critiques de première espèce. On pose $\mathcal{L}(x, y) = \ln(x - y) - \lambda(x^2 + y^2 - 2)$ le Lagrangien.

$$\text{Résolvons } \begin{cases} \nabla \mathcal{L}(x, y) = (0, 0) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-y} - 2\lambda x = 0 \\ -\frac{1}{x-y} - \lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\lambda x(x - y) = 0 \quad (1) \\ -1 - \lambda y(x - y) = 0 \quad (2) \\ x^2 + y^2 = 2 \quad (3) \end{cases}$$

En effectuant $(1) + (2)$, on trouve $-\lambda(y + 2x)(x - y) = 0$ donc $\lambda = 0$ ou $y = -2x$ (car $x - y \neq 0$).

Si $\lambda = 0$, la première relation donne $1 = 0$, impossible. Donc $y = -2x$. La troisième relation donne alors

$5x^2 = 2$ donc $x = \sqrt{\frac{2}{5}}$ ($x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$ est impossible car alors $x - y = 5x < 0$). La première relation donne alors

$$\lambda = \frac{1}{2x(x - y)} = \frac{1}{10x^2} = \frac{1}{4}. \text{ Il y a donc un seul point critique, } A = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}, -2\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \text{ avec } \lambda = \frac{1}{4}.$$

- On cherche à déterminer sa nature. On a, pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, $\mathcal{L}(x, y) = \ln(x - y) - \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - 2)$. Or :
 - $(x, y) \mapsto \ln(x - y)$ est concave, comme composée d'une fonction affine par une fonction concave.
 - $(x, y) \mapsto -\frac{1}{4}(x^2 + y^2 - 2)$ est concave par les propriétés d'extension et d'addition.

\mathcal{L} est donc concave comme somme de fonctions concaves. \mathcal{L} a donc un maximum global en A , f a donc un maximum global en A sous la contrainte.

Attention : ici l'ensemble sur lequel on optimise la fonction f n'est pas compact et le théorème correspondant. En effet, si l'ensemble des points qui satisfont la contrainte est un cercle (qui est bien compact), on ne travaille que sur l'ensemble des points (x, y) de ce cercle qui satisfont aussi $x - y > 0$. L'ensemble sur lequel on optimise f est donc $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 2 \text{ et } x - y > 0\}$, et cet ensemble n'est pas fermé (et a fortiori pas compact).

6. f et g sont définies et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

- Recherchons les éventuels points critiques de seconde espèce. On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla g(x, y) = (-\frac{1}{2}x, -\frac{1}{8}y)$ et celui-ci ne s'annule qu'en $(0, 0)$. Or ce point ne satisfait pas la contrainte, il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce.
- Recherchons les points critiques de première espèce.

On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}y^2 - 1\right)$.

$$\text{Résolvons } \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(2 - \frac{\lambda}{2}\right) = 0 \quad (1) \\ y\left(2 + \frac{\lambda}{2}\right) = 0 \quad (2) \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad (3) \end{cases}$$

La première relation impose $x = 0$ ou $\lambda = 4$, et la seconde impose $y = 0$ ou $\lambda = -4$.

Si $x = 0$, alors la troisième relation donne $y^2 = -16$ ce qui est impossible. Donc $x \neq 0$ et $\lambda = 4$, et donc aussi $y = 0$. La troisième relation donne $x^2 = 4$ donc $x = -2$ ou $x = 2$.

Il y a donc deux points critiques de première espèce : $A = (-2, 0)$ (avec $\lambda = 4$) et $B = (2, 0)$ (avec $\lambda = 4$).

- Déterminons la nature de ces points critiques. Pour $\lambda = 4$, on a $\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y^2 - 4 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} - 1 \right) = \frac{5}{4}y^2 + 4$. \mathcal{L} est donc une fonction convexe (par la propriété d'extension). \mathcal{L} a donc un minimum global en A et B . Sous la contrainte, f possède donc un minimum global en A et B , de valeur 4.

8. f et g sont définies et de classe C^1 sur $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0, y \neq 0\}$.

- Recherchons les points critiques de seconde espèce.

On a, pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$, $\nabla g(x, y) = \left(-\frac{2}{x^3}, -\frac{2}{y^3} \right)$ et celui-ci ne s'annule pas. Il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce.

- Recherchons les points critiques de première espèce. On pose, pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$,

$$\mathcal{L}(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \lambda \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2} \right). \text{ On a, pour tout } (x, y) \in \mathcal{U}, \nabla \mathcal{L}(x, y) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2\lambda}{x^3}, -\frac{1}{y^2} + \frac{2\lambda}{y^3} \right).$$

$$\text{On a } \begin{cases} \nabla \mathcal{L}(x, y) = (0, 0) \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ \lambda^2 = 1 \end{cases}.$$

La troisième relation donne $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$. Les points critiques de première espèce sont donc $A = (-2, -2)$ avec $\lambda = -1$ et $B = (2, 2)$ avec $\lambda = 1$.

- Étudions la nature des points critiques à l'aide des conditions du second ordre. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{x^3} - \frac{6\lambda}{x^4}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2}{y^3} - \frac{6\lambda}{y^4}.$$

En A , on a donc $r = \frac{2}{(-2)^3} - \frac{6 \times (-1)}{(-2)^4} = \frac{1}{8}$, de même $t = \frac{1}{8}$. On a alors $rt - s^2 = \frac{1}{64} > 0$ et $r > 0$. \mathcal{L} a donc un minimum local en A et f a donc un minimum local en A sous la contrainte, de valeur $f(-2, -2) = -1$.

En B , on a donc $r = \frac{2}{2^3} - \frac{6 \times 1}{2^4} = -\frac{1}{8}$, de même $t = -\frac{1}{8}$. On a alors $rt - s^2 = \frac{1}{64} > 0$ et $r < 0$. \mathcal{L} a donc un maximum local en B et f a donc un maximum local en B sous la contrainte, de valeur $f(2, 2) = 1$.

Exercice 2.61

On considère la fonction f définie par $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D} de f . Cet ensemble est-il convexe ? On admet que \mathcal{D} est un ensemble ouvert.
2. Calculer le gradient de f en chaque point de \mathcal{D} .
3. Déterminer l'approximation affine de f au voisinage du point $(1, 2)$.
4. On cherche les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathcal{D}, x^2 + y^2 = 2\}$.
 - (a) Montrer qu'il n'existe pas de points critiques de seconde espèce.
 - (b) Chercher les points critiques de première espèce.
 - (c) Déterminer les extrema de f sur \mathcal{E} .
5. Déterminer les extrema de f sur \mathcal{D} . On pourra étudier le signe de f sur \mathcal{D} .
6. Déterminer les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{G} = \{(x, y) \in \mathcal{D}, x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Corrigé

1. f est définie sur $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Cet ensemble n'est pas convexe : il contient les points $A = (-1, 0)$ et $B = (1, 0)$ mais pas leur milieu $\frac{1}{2}(A + B) = (0, 0)$.
2. On a, en tout point $(x, y) \in \mathcal{D}$, $\nabla f(x, y) = \left(\frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} \right)$.
3. On en déduit l'approximation affine au voisinage du point $M = (1, 2)$: pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, $\hat{f}_M(x, y) = f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2) = \frac{4}{5} + \frac{32}{25}(x - 1) + \frac{8}{25}(y - 2)$.
4. On pose, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$, ainsi $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0\}$.
 - (a) On a, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ qui ne s'annule qu'en $(0, 0)$. Or ce point ne satisfait pas la contrainte. Il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce.
 - (b) Posons, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$. Résolvons

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} - 2\lambda x = 0 \\ \frac{2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$
 En remplaçant $x^2 + y^2$ par 2 dans les deux premières relations, celles-ci deviennent respectivement $xy^4 - 4\lambda x = 0$ soit $x(y^4 - 4\lambda) = 0$ et $x^4y - 4\lambda y = 0$ soit $y(x^4 - 4\lambda) = 0$. Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors $x^4 = 4\lambda = y^4$, donc $x = y$ ou $x = -y$. La relation (3) donne alors $2x^2 = 2$ donc $x = -1$ ou $x = 1$, ce qui implique $y = 1$ ou $y = -1$, et $\lambda = \frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}$. le cas $x = y = 0$ n'est pas possible car ce point ne satisfait pas la contrainte. Si $x = 0$, alors la troisième égalité donne $y^2 = 2$ donc $y = -\sqrt{2}$ ou $y = \sqrt{2}$ puis $\lambda = \frac{x^4}{4} = 0$. De même si $y = 0$, alors la troisième égalité donne $x^2 = 2$ donc $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$ puis $\lambda = \frac{y^4}{4} = 0$. Il y a donc six points critiques de première espèce : $A = (-1, 1)$ (avec $\lambda = \frac{1}{4}$), $B = (1, -1)$ (avec $\lambda = \frac{1}{4}$), $C = (-\sqrt{2}, 0)$ (avec $\lambda = 0$), $D = (\sqrt{2}, 0)$ (avec $\lambda = 0$), $F = (0, -\sqrt{2})$ (avec $\lambda = 0$), $G = (0, \sqrt{2})$ (avec $\lambda = 0$).
 - (c) L'ensemble \mathcal{E} est compact (c'est un cercle, fermé et borné car inclus dans la boule fermée de même centre et même rayon). f étant continue, elle admet un minimum et un maximum globaux sur \mathcal{D} . Or $f(A) = f(B) = 2$ et $f(C) = f(D) = f(F) = f(G) = 0$, donc f admet un maximum global en A et B et un minimum global en C, D, F et G .
5. On a calculé le gradient de f à la question 2. Celui-ci s'annule en $(x, y) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$, et alors $f(x, y) = 0$. Or on voit que $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$. f admet donc un minimum global sur \mathcal{D} , de valeur 0, en tout point $(x, y) \in \mathcal{D}$ tel que $x = 0$ ou $y = 0$.
6. On a vu à la question précédente que sur l'ouvert $\overset{\circ}{\mathcal{G}} = \{(x, y) \in \mathcal{D}, x^2 + y^2 < 2\}$, f admet un minimum global en tout point (x, y) tel que $x = 0$ ou $y = 0$, et n'admet pas de maximum (même local). De plus, sur la frontière de \mathcal{G} , on a vu que f admet un minimum global en C, D, F, G et un maximum global en A et B . En conclusion, sur \mathcal{G} , f admet un minimum global de valeur 0 en tout point $(x, y) \in \mathcal{G}$ tel que $x = 0$ ou $y = 0$ (ce qui inclut C, D, F, G) et un maximum global, de valeur 2, en A et B .

Exercice 2.63

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y$.
 - (a) Calculer les points critiques de f et donner leur nature locale.
 - (b) En étudiant f , préciser si les extrema locaux trouvés à la question précédente sont globaux ou non.
 - (c) Rechercher et représenter sur un graphique la courbe de niveau 0 de f .
2. Soit la fonction g définie sur \mathbb{R}^2 par $g(x, y) = x^2 + y^2$. On cherche maintenant à optimiser f sous la contrainte $g(x, y) = 1$.
 - (a) Montrer qu'il n'y a pas de point critique de seconde espèce sous la contrainte $g(x, y) = 1$.

- (b) Chercher les 6 points critiques de première espèce sous la contrainte $g(x, y) = 1$. Représenter ces points critiques sur un dessin.
- (c) Donner le maximum et le minimum global de f sous la contrainte $g(x, y) = 1$.
- (d) Donner (lorsque c'est possible) la nature des autres points critiques sous la contrainte $g(x, y) = 1$.

Corrigé

1. (a) On calcule les dérivées partielles de f . Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^2 + y + 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 1.$$

Cherchons les points critiques de f : résolvons
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xy = 0 \\ -x^2 + y + 1 = 0 \end{cases} \cdot \text{La première}$$

relation donne $x = 0$ ou $y = 0$. Si $x = 0$, la deuxième relation donne alors $y = -1$. Si $y = 0$, la deuxième relation donne alors $x^2 = 1$ donc $x = 1$ ou $x = -1$. Les points critiques sont donc $(0, -1)$, $(-1, 0)$ et $(1, 0)$.

Déterminons leur nature à l'aide des conditions du second ordre.

- En $(0, 1)$ on a $r = 2, s = 0, t = 1$ et $rt - s^2 = 2 > 0$. De plus, $r = 2 > 0$. f a donc un minimum local en $(0, -1)$ de valeur $-1/2$.
- En $(-1, 0)$ on a $r = 0, s = 2, t = 1$ et $rt - s^2 = -4 < 0$. f a donc un point-col en $(-1, 0)$.
- En $(1, 0)$, on a $r = 0, s = -2, t = 1$ et $rt - s^2 = -4$. f a donc un point-col en $(1, 0)$.

- (b) On a $f(2, 1) = -5/2 < -1/2$. L'extremum local atteint en $(0, -1)$ n'est donc pas global.

- (c) On a $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y(-x^2 + \frac{1}{2}y + 1) = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \text{ ou } y = 2x^2 - 2)$. La courbe de niveau 0 de f est donc l'union de la droite d'équation $y = 0$ et de la courbe d'équation $y = 2x^2 - 2$.

2. On pose $h(x, y) = g(x, y) - 1$. Le problème revient à optimiser f sous la contrainte $h(x, y) = 0$.

- (a) Le gradient de h est donné par $\nabla h(x, y) = (2x, 2y)$. Il ne s'annule qu'en $(0, 0)$ qui ne satisfait pas la contrainte $h(x, y) = 0$. Il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce sous la contrainte $g(x, y) = 1$.

- (b) On appelle $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda h(x, y) = -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ le Lagrangien associé au problème.

Résolvons le système
$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y) = 0 \\ h(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xy - 2\lambda x = 0 \\ -x^2 + y + 1 - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} .$$

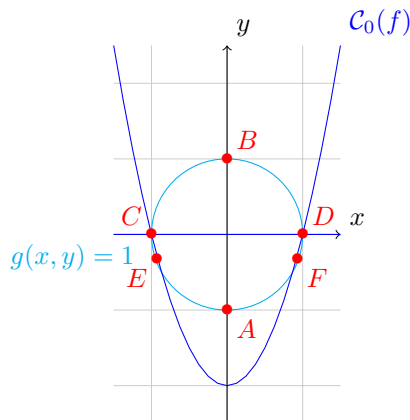
La première relation se réécrit $-2x(\lambda + y) = 0$ et donne donc $x = 0$ ou $y = -\lambda$.

- Si $x = 0$, alors la troisième relation donne $y^2 = 1$ soit $y = 1$ ou $y = -1$. D'après la deuxième relation, on a alors $\lambda = \frac{y+1}{2y}$, soit 0 si $y = -1$ et 1 si $y = 1$.
- Si $y = -\lambda$, la deuxième relation se réécrit $-x^2 - \lambda + 1 + 2\lambda^2 = 0$ et la troisième $x^2 + \lambda^2 = 1$. En additionnant ces deux relations, on trouve $3\lambda^2 - \lambda + 1 = 1$ soit $\lambda(3\lambda - 1) = 0$. Cela donne $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{1}{3}$.
Si $\lambda = 0$, la troisième relation donne $x^2 = 1$ d'où $x = 1$ ou $x = -1$, et l'hypothèse donne $y = -\lambda = 0$.
Si $\lambda = \frac{1}{3}$, la troisième relation donne $x^2 + (\frac{1}{3})^2 = 1$ soit $x^2 = \frac{8}{9}$ et donc $x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, et l'hypothèse donne $y = -\frac{1}{3}$.

En conclusion, nous avons les points critiques suivants :

$A = (0, -1)$ avec $\lambda = 0$; $B = (0, 1)$ avec $\lambda = 1$; $C = (-1, 0)$ avec $\lambda = 0$; $D = (1, 0)$ avec $\lambda = 0$;

$E = (-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ avec $\lambda = \frac{1}{3}$; $F = (\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ avec $\lambda = \frac{1}{3}$.



- (c) L'ensemble des points satisfaisant la contrainte $g(x, y) = 1$ est le cercle de centre $O = (0, 0)$ et de rayon 1. Il est fermé et borné, donc compact, et f étant continue, elle admet un minimum et un maximum globaux sur ce cercle. Ceux-ci sont nécessairement atteints en des points critiques.
 Or on a $f(A) = -\frac{1}{2}, f(B) = \frac{3}{2}, f(C) = 0, f(D) = 0, f(E) = -\frac{31}{54}, f(F) = -\frac{31}{54}$.
 Le minimum global de f sous la contrainte est donc atteint en E et F , et le maximum global est atteint en B .
- (d) Les trois points critiques restants A, C, D ont pour multiplicateur de Lagrange $\lambda = 0$, le Lagrangien associé est donc égal à f . On a déjà prouvé que f admettait un minimum local (sans contrainte) en A , c'en est donc aussi un sous la contrainte. En C et D , on a prouvé que f admettait un point-col (sans la contrainte) : on ne peut donc rien conclure quant à la nature de ces points critiques sous la contrainte.

Exercice 2.65

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - x^2 - x, \quad g(x, y) = x^2 + y^2$$

1. Montrer que f n'admet aucun extremum global sur \mathcal{D} .
2. Déterminer les points critiques de f .
3. Donner la nature des points critiques de f .

On cherche maintenant à optimiser f sous la contrainte $g(x, y) = 1$

4. Montrer qu'il n'y a pas de point critique de seconde espèce sous la contrainte $g(x, y) = 1$.
5. Chercher les 4 points critiques de première espèce. Représenter ces points critiques sur un dessin.
6. Montrer que f admet un maximum global et un minimum global sous la contrainte $g(x, y) = 1$. Préciser les points où ces extrema sont atteints et leurs valeurs.
7. Étudier la nature du point critique restant.

Corrigé

1. On a, pour tout $y > 0, f(0, y) = \ln(y^2) = 2 \ln(y)$. Cette quantité tend vers $-\infty$ (respectivement $+\infty$) lorsque y tend vers 0 (respectivement $+\infty$). f n'admet donc pas d'extremum global sur \mathcal{D} .

2. On calcule, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} - 2x - 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$.

Si ces deux quantités sont nulles en (x, y) , alors la deuxième relation impose $y = 0$ et la première se réécrit $\frac{2}{x} - 2x - 1 = 0$ soit $-2x^2 - x + 2 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 2 = 17$.

Il y a donc deux racines $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$.

Les points critiques sont donc $\left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}, 0\right)$ et $\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, 0\right)$.

3. On calcule, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

En particulier, en tout point (x, y) de \mathcal{D} où $x \neq 0, y = 0$ (ce qui est le cas des points critiques), on a

$r = -\frac{2}{x^2} - 2 < 0, s = 0, t = \frac{2}{x^2} > 0$ d'où $rt - s^2 < 0$. Les deux points critiques sont donc des points-col pour f .

4. On a, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}, \nabla g(x, y) = (2x, 2y)$. Celui-ci ne s'annule qu'en $(0, 0)$, point qui ne satisfait pas la contrainte $g(x, y) = 1$. Il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce.

5. On pose $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - 1)$ le Lagrangien associé au problème.

$$\text{Résolvons } \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + y^2} - 2x - 1 - 2\lambda x = 0 \\ \frac{2y}{x^2 + y^2} - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} .$$

D'après la troisième relation, on peut remplacer $x^2 + y^2$ par 1 dans les deux premières relations. Il vient $\begin{cases} -1 - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} .$

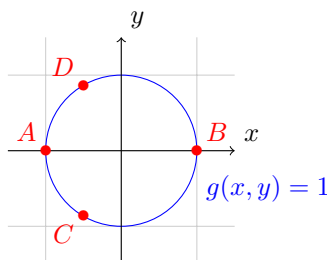
La seconde relation se réécrit $y(1 - \lambda) = 0$, donc $y = 0$ ou $\lambda = 1$.

Si $y = 0$, la troisième relation implique $x^2 = 1$ donc $x = -1$ ou $x = 1$, et la première donne enfin $\lambda = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Si $\lambda = 1$, la première relation donne $x = -\frac{1}{2}$ et la troisième donne $y^2 = \frac{3}{4}$ soit $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les points critiques de première espèce sont donc

$A = (-1, 0)$ avec $\lambda = \frac{1}{2}$, $B = (1, 0)$ avec $\lambda = -\frac{1}{2}$, $C = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ avec $\lambda = 1$ et $D = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ avec $\lambda = 1$.



6. L'ensemble des points satisfaisant la contrainte est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 qui est compact. La fonction f étant continue, elle admet un minimum et un maximum globaux sous la contrainte, qui ne peuvent être atteints qu'en des points critiques. Or on a $f(A) = 0, f(B) = -2, f(C) = f(D) = \frac{1}{4}$. f atteint donc son minimum global en B et son maximum global en C et D .

7. Sous la contrainte, on a $f(x, y) = -x^2 - x = -x(1 + x)$. Au voisinage de $(-1, 0)$, cette quantité change de signe. f possède donc un point-col en A sous la contrainte.