Exercices corrigés
Fonctions de deux variables

Fonctions convexes et extrema libres

Exercice 1.62

Soit la fonction f définie par
$$f(x, y) = x^\alpha y^\beta$$
où α et β sont des réels non nuls. Soit $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$. *On admet que $\mathcal{C}$ est ouvert.* Étudier la convexité (ou la concavité) de f sur $\mathcal{C}$ en discutant selon les valeurs de α et β.

Corrigé

Commençons par remarquer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{C}$, on a $\ln(f(x, y)) = \alpha \ln(x) + \beta \ln(y)$. Ainsi, si $\alpha < 0, \beta < 0$, $\ln \circ f$ est convexe (par les propriétés d'extension et d'addition), donc f est convexe.

Calculons les dérivées partielles de f. On a, pour tout $(x, y) \in \mathcal{C}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \beta x^\alpha y^{\beta-1}$, puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} y^\beta$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \alpha\beta x^{\alpha-1} y^{\beta-1}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(x, y) = \beta(\beta - 1)x^\alpha y^{\beta-2}$. Le déterminant de la matrice hessienne en (x, y) vaut donc $rt - s^2 = \alpha\beta(\alpha - 1)(\beta - 1)x^{2\alpha-2} y^{2\beta-2} - (\alpha\beta)^2 x^{2\alpha-2} y^{2\beta-2} = \alpha\beta(1 - \alpha - \beta)x^{2\alpha-2} y^{2\beta-2}$. Celui-ci est du signe de $\alpha\beta(1 - \alpha - \beta)$. Ainsi :

- Si $\alpha < 0, \beta > 0$ et $\alpha + \beta \leq 1$, on a $rt - s^2 \geq 0$ et $r \geq 0$, donc f est convexe.
- Si $\alpha < 0, \beta > 0$ et $\alpha + \beta > 1$, on a $rt - s^2 < 0$ et $r \geq 0$, donc f n'est ni convexe ni concave.
- On peut faire la même analyse dans le cas symétrique $\alpha > 0, \beta < 0$.
- Si $\alpha > 0, \beta > 0$, $rt - s^2$ est du signe de $1 - \alpha - \beta$. Ainsi, si celui-ci est positif, on a $r \leq 0$: en effet, comme $0 < \alpha + \beta \leq 1$, on a $\alpha - 1 \leq 0$. f est donc concave. En revanche, si $1 - \alpha - \beta < 0$, f n'est ni convexe ni concave.

On résume tous ces résultats dans le tableau ci-dessous.

α	β	$\alpha + \beta$	f est
< 0	< 0	-	convexe
< 0	> 0	≤ 1	convexe
< 0	> 0	> 1	ni convexe ni concave
> 0	< 0	≤ 1	convexe
> 0	< 0	> 1	ni convexe ni concave
> 0	> 0	≤ 1	concave
> 0	> 0	> 1	ni convexe ni concave

Exercice 2.42

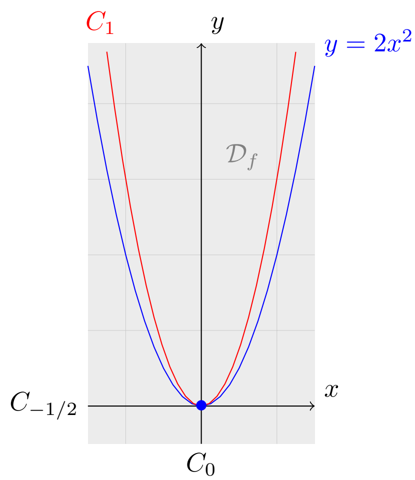
On considère la fonction réelle de deux variables f définie par $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y - 2x^2}$.

1. Déterminer et représenter son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On admet que cet ensemble est ouvert. Est-il convexe ? On admet que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.
2. Représenter sur le même dessin que la question 1 les courbes de niveau $C_1, C_{-1/2}$ et C_0.
3. Calculer le gradient de f en tout point de $\mathcal{D}_f$.

4. Écrire le développement limité à l'ordre 1 de f au point $(1,1)$. En déduire une valeur approchée de f au point $(0.9, 1.1)$.

Corrigé

1. Le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 2x^2\}$. Cet ensemble n'est pas convexe : il contient les points $(1,0)$ et $(-1,0)$ mais pas leur milieu $(0,0)$.
2. Soit $(x,y) \in \mathcal{D}_f$.
   On a $(x,y) \in C_1 \Leftrightarrow f(x,y) = 1 \Leftrightarrow x^2 = y - 2x^2 \Leftrightarrow y = 3x^2$. C_1 est donc la courbe d'équation $y = 3x^2$ privée du point $(0,0)$.
   On a $(x,y) \in C_{-1/2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{y-2x^2} = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y = 0$. $C_{-1/2}$ est donc l'axe des abscisses privé du point $(0,0)$.
   On a $(x,y) \in C_0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. C_0 est donc l'axe des ordonnées privé du point $(0,0)$.



3. On a, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_f$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x(y-2x^2) - x^2 \times (-4x)}{(y-2x^2)^2} = \dfrac{2xy}{(y-2x^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-x^2}{(y-2x^2)^2}$, d'où le gradient : $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{2xy}{(y-2x^2)^2}, \dfrac{-x^2}{(y-2x^2)^2}\right)$.
4. On a $f(1,1) = -1$ et $\nabla f(1,1) = (2,-1)$. D'où le développement limité à l'ordre 1 de f en $(1,1)$:
   $f(x,y) = -1 + 2(x-1) - (y-1) + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}\,\varepsilon(x-1, y-1)$ avec $\varepsilon(x-1,y-1) \underset{(x,y)\to(1,1)}{\longrightarrow} 0$.
   En négligeant le terme de reste, on obtient l'approximation $f(0.9, 1.1) \simeq -1 + 2(0.9-1) - (1.1-1) = -1.3$.

Exercice 2.50

On considère la fonction réelle de deux variables f définie par

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{x+y}.$$

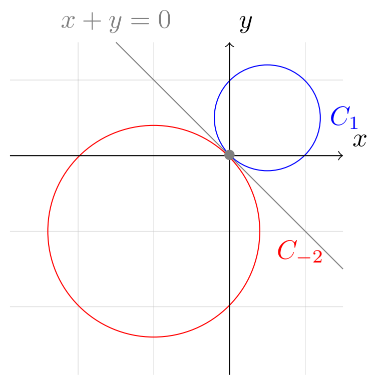
1. Déterminer et représenter son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. On admet qu'il est ouvert. Est-il convexe ? Justifier votre réponse.
2. Déterminer et représenter (sur le même graphique que pour la question précédente) la courbe de niveau $\mathcal{C}_k$ pour $k = -2$ et $k = 1$.
3. On admet que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_f$. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
4. En déduire une valeur approchée de f au point $(0.9, 1.2)$ et déterminer l'équation de la tangente à la courbe de niveau C_1 au point $(1,1)$.

5. Trouver les extrema de f sur $\mathcal{D}_f$.
6. Trouver les extrema de f sur le cercle de centre $(-1,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
7. Étudier la convexité ou la concavité de f sur les ensembles E_1 et E_2 définis par

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y > 0\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y < 0\}.$$

Corrigé

1. On a $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y \neq 0\}$. C'est le plan privé de la droite d'équation $x+y=0$. Il n'est pas convexe : il contient les points $(1,0)$ et $(-1,0)$ mais pas leur milieu $(0,0)$.
2. Soit $(x,y) \in \mathcal{D}_f$. On a $(x,y) \in C_{-2} \Leftrightarrow x^2+y^2+2(x+y)=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=2$. La courbe de niveau -2 est donc l'intersection du cercle de centre $(-1,-1)$, de rayon $\sqrt{2}$, avec $\mathcal{D}_f$.
   On a aussi $(x,y) \in C_1 \Leftrightarrow x^2+y^2-x-y=0 \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$. La courbe de niveau 1 est donc l'intersection du cercle de centre $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ avec $\mathcal{D}_f$.



3. Soit $(x,y) \in \mathcal{D}_f$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x(x+y)-(x^2+y^2)}{(x+y)^2} = \dfrac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2}$ et par symétrie, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y^2+2xy-x^2}{(x+y)^2}$.
   Puis $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2(x+y)(x+y)^2-2(x+y)(x^2+2xy-y^2)}{(x+y)^4} = \dfrac{2((x+y)^2-x^2-2xy+y^2)}{(x+y)^3} = \dfrac{4y^2}{(x+y)^3}$. Par symétrie, $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{4x^2}{(x+y)^3}$. Enfin, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{2(x-y)(x+y)^2-2(x+y)(x^2+2xy-y)^2}{(x+y)^4} = \dfrac{4xy}{(x+y)^3}$.
4. L'approximation affine de f au point $M=(1,1)$ est alors donnée par
   $\widehat{f}_M(x,y) = f(1,1) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)(x-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(M)(y-1) = 1 + \dfrac{1}{2}(x-1) + \dfrac{1}{2}(y-1)$.
   On en déduit $f(0.9,1.2) \simeq \widehat{f}_M(0.9,1.2) = 1 + \dfrac{1}{2}(0.9-1) + \dfrac{1}{2}(1.2-1) = 1.05$.
   L'équation de la tangente à C_1 en $(1,1)$ est donnée par
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(M)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(M)(y-1) = 0 \Leftrightarrow x+y-2=0.$$
5. $\mathcal{D}_f$ étant ouvert, cherchons les points critiques de f sur $\mathcal{D}_f$. On a $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x^2+2xy-y^2, y^2+2xy-x^2) = (0,0)$. En additionnant les deux relations, on obtient $4xy=0$ donc $x=0$ ou $y=0$. Mais alors, comme $x^2+2xy-y^2=0$, on a en fait $x=y=0$. C'est impossible car $(0,0)$ n'appartient pas à $\mathcal{D}_f$. f n'a donc pas d'extremum local sur $\mathcal{D}_f$.
6. On a vu que le cercle de centre $(-1,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$ (privé du point $(0,0)$) est exactement la courbe de niveau -2 de f. f est donc constante sur ce cercle, tous les points sont donc des minima et maxima globaux de f sous la contrainte.
7. Calculons le déterminant de la matrice hessienne en un point (x,y) de $\mathcal{D}_f$. On a
   $rt-s^2 = \dfrac{4y^2}{(x+y)^3} \times \dfrac{4x^2}{(x+y)^3} - \left(\dfrac{4xy}{(x+y)^3}\right)^2 = 0$. On étudie alors le signe de r. Celui-ci est du signe de $x+y$, donc positif sur E_1 et négatif sur E_2. f est donc convexe sur E_1 et concave sur E_2.

Exercice 2.51

Une firme (en situation de monopole) produit un unique bien qui peut être vendu à deux clients a et b. Si la firme produit la quantité Q_a d'unités de bien pour le client a, alors celui-ci est disposé à payer le prix unitaire de $50 - 5Q_a$. Si la firme produit la quantité Q_b d'unités de bien pour le client b, alors celui-ci est disposé à payer le prix unitaire de $100 - 10Q_b$. Le coût pour la firme de produire Q unités de bien est $90 + 20Q$.

1. Que représente la fonction Π définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ par l'expression ci-dessous ?
$$\Pi(Q_a, Q_b) = Q_a(50 - 5Q_a) + Q_b(100 - 10Q_b) - (90 + 20(Q_a + Q_b))$$
2. Si la firme veut maximiser son profit, quelle quantité de bien doit-elle produire et vendre à chaque client ? Calculer alors le profit maximal.

Corrigé

1. La fonction Π donne le profit de l'entreprise en fonction des quantités produites et vendues à chaque client.
2. On peut réécrire $\Pi(Q_a, Q_b) = -5Q_a^2 - 10Q_b^2 + 30Q_a + 80Q_b - 90$. On voit ainsi que Π est une fonction concave (en appliquant par exemple le critère sur les fonctions quadratiques, ou comme somme de deux fonctions concaves (par le lemme d'extension) et d'une fonction affine qui est donc aussi concave). Tout point critique de Π sera donc un point où Π a un maximum global. Déterminons les points critiques.
On a $\dfrac{\partial \Pi}{\partial Q_a}(Q_a, Q_b) = -10Q_a + 30, \dfrac{\partial \Pi}{\partial Q_b}(Q_a, Q_b) = -20Q_b + 80$.
Les deux dérivées partielles s'annulent en $Q_a = 3, Q_b = 4$. Ce sont donc les quantités à produire pour maximiser le profit. Le profit maximal vaut alors $\overline{\Pi} = -5 \times 3^2 - 10 \times 4^2 + 30 \times 3 + 80 \times 4 - 90 = 115$.

Exercice 2.52

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x^2 + y^2)\exp(-x)$. On admet qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Trouver les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle ne possède pas de maximum global.

Corrigé

1. Calculons les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\exp(-x) - (x^2 + y^2)\exp(-x) = (2x - x^2 - y^2)\exp(-x)$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y\exp(-x)$ puis
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (2 - 2x)\exp(-x) - (2x - x^2 - y^2)\exp(-x) = (x^2 + y^2 - 4x + 2)\exp(-x)$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2y\exp(-x)$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2\exp(-x)$.
Cherchons maintenant les points critiques. On a
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow 2y\exp(-x) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ car l'exponentielle ne s'annule pas.
Il s'ensuit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Leftrightarrow (2x - x^2 - y^2)\exp(-x) = 0 \Leftrightarrow x(2 - x) = 0$ car $y = 0$.
Les points critiques sont donc $(0, 0)$ et $(-2, 0)$. On applique les conditions du second ordre pour déterminer la nature des points critiques.
   - En $(0, 0)$:
   $r = (0^2 + 0^2 - 4 \times 0 + 2)\exp(-0) = 2, s = -2 \times 0\exp(-0) = 0, t = 2\exp(-0) = 2$.
   On a alors $rt - s^2 = 2 \times 2 - 0^2 = 4 > 0$. De plus, $r = 2 > 0$. f possède donc un minimum local en $(0, 0)$.
   - En $(2, 0)$:
   $r = (2^2 + 0^2 - 4 \times 2 + 2)e^{-2} = -2e^{-2}, s = -2 \times 0e^{-2} = 0, t = 2e^{-2}$.
   On a alors $rt - s^2 = -4e^{-4} < 0$. f a donc un point selle en $(2, 0)$.
   - On a $f(0, 0) = 0$, et on a clairement $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. f a donc un minimum global en $(0, 0)$. f n'a en revanche pas de maximum global. En effet, si elle en avait un, celui-ci serait atteint en un point critique, or aucun des deux points critiques ne donne de maximum local pour f, donc a fortiori pas de maximum global.

Extrema liés et exercices de synthèse

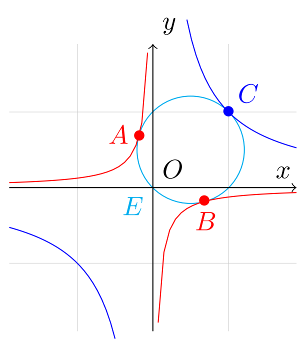
Exercice 1.69

Déterminer les extrema (locaux et globaux) des fonctions f suivantes sur leur domaine de définition sous la contrainte $g(x,y)=0$.

2. $f(x,y)=xy,\quad g(x,y)=x^2+y^2-x-y$ (on fera également une résolution graphique).
5. $f(x,y)=\ln(x-y),\quad g(x,y)=x^2+y^2-2$.
6. $f(x,y)=x^2+y^2,\quad g(x,y)=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}-1$.
7. $f(x,y)=2x+y,\quad g(x,y)=x^2+xy-y^2-1$.
8. $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y},\quad g(x,y)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{2}$.
9. $f(x,y)=x^2+y^2+(y-x)^2,\quad g(x,y)=x^2+y^2+2y-2x-6=0$.

Corrigé

2. f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2, g(x,y)=0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.
   L'ensemble E des points satisfaisant la contrainte est donc le cercle de centre $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
   Pour optimiser f sous la contrainte de façon géométrique, il faut déterminer les plus petit et plus grand $k\in\mathbb{R}$ tels que la courbe de niveau k de f coupe l'ensemble E, ou encore que cette courbe de niveau soit tangente au cercle. Or, pour $k\neq 0$, la courbe de niveau k est l'hyperbole d'équation $y=\frac{k}{x}$. On constate géométriquement qu'il semble y avoir deux valeurs de k pour lesquelles l'hyperbole est tangente au cercle (courbes rouge et bleue).

   Vérifions par le calcul le résultat obtenu.

   - On cherche les points critiques de seconde espèce. On a, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2, \nabla g(x,y)=(2x-1,2y-1)$ qui ne s'annule qu'en $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Or ce point ne satisfait pas la contrainte $g(x,y)=0$. Il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce.
   - Cherchons les points critiques de première espèce.
     On pose, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(x,y)=xy-\lambda(x^2+y^2-x-y)$.
     Résolvons $\left\{\begin{array}{ll}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(x,y) & =0\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}(x,y) & =0\\ g(x,y) & =0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} y-\lambda(2x-1) & =0\ (1)\\ x-\lambda(2y-1) & =0\ (2)\\ x^2+y^2-x-y & =0\ (3)\end{array}\right.$
     Effectuer $(1)+2\lambda(2)$ donne $(1-4\lambda^2)y+\lambda(1+2\lambda)=0$, soit $(1+2\lambda)((1-2\lambda)y+\lambda)=0$, donc $1+2\lambda=0$ ou $(1-2\lambda)y+\lambda=0$.
     Si $1+2\lambda=0$, soit $\lambda=-\frac{1}{2}$, les relations (1) et (2) se réécrivent $y=\frac{1}{2}-x$.

La troisième relation s'écrit alors $x^2 + \left(\dfrac{1}{2} - x\right)^2 - x - \left(\dfrac{1}{2} - x\right) = 0$ soit $2x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$.

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 3 > 0$. Il y a donc deux racines, $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$. On en déduit $y_1 = \dfrac{1}{2} - x_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$ et $y_2 = \dfrac{1}{2} - x_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$.

Si $\lambda \neq -\frac{1}{2}$, alors $(1-2\lambda)y + \lambda = 0$. Remarquons que $\lambda \neq \frac{1}{2}$: en effet, si $\lambda = \frac{1}{2}$, (1) se réécrit $y - x + 1 = 0$ et (2) se réécrit $x - y + 1 = 0$, soit en sommant ces deux relations, $2 = 0$ ce qui est impossible. On peut donc diviser par $(1-2\lambda)$, ce qui donne $y = \dfrac{-\lambda}{1-2\lambda}$. Il s'ensuit par (2) que $x = \lambda(2y-1) = \dfrac{-\lambda}{1-2\lambda} = y$. La relation (3) se réécrit alors $2x^2 - 2x = 0$ soit $x(x-1) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1$, et par suite $y = 0$ ou $y = 1$, avec respectivement $\lambda = 0$ ou $\dfrac{-\lambda}{1-2\lambda} = 1$ soit $\lambda = 1$.

Il y a donc quatre points critiques : $A = \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$ (avec $\lambda = -\frac{1}{2}$), $B = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}, \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$ (avec $\lambda = -\frac{1}{2}$), $O = (0,0)$ (avec $\lambda = 0$) et $C = (1,1)$ (avec $\lambda = 1$).

- Déterminons la nature des points critiques. On remarque que E est compact (il est fermé, et borné car inclus dans la boule fermée de centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et de rayon $1/\sqrt{2}$). Comme f est continue, elle admet un minimum global et un maximum global sur E. Or on a $f(A) = f(B) = -\frac{1}{8}, f(O) = 0$ et $f(C) = 1$. f a donc un minimum global en A et B et un maximum global en D (ce qui confirme ce qui avait été observé géométriquement). On constate par ailleurs (toujours géométriquement) que f est de signe négatif au voisinage de O sous la contrainte, et $f(O) = 0$: f a donc un maximum local en O sous la contrainte.

5. f et g sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x - y > 0\}$.

   - Recherchons les points critiques de seconde espèce. On a, pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}, \nabla g(x,y) = (2x, 2y)$ qui ne s'annule qu'en le point $(0,0)$. Mais celui-ci ne satisfait pas la contrainte $g(x,y) = 0$, il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce.
   - Recherchons les points critiques de première espèce. On pose $\mathcal{L}(x,y) = \ln(x-y) - \lambda(x^2+y^2-2)$ le Lagrangien.
   Résolvons $\left\{\begin{array}{rl} \nabla\mathcal{L}(x,y) & = (0,0) \\ g(x,y) & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \frac{1}{x-y} - 2\lambda x & = 0 \\ -\frac{1}{x-y} - \lambda y & = 0 \\ x^2+y^2 & = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 1 - 2\lambda x(x-y) & = 0 \ (1) \\ -1 - \lambda y(x-y) & = 0 \ (2) \\ x^2+y^2 & = 2 \ (3) \end{array}\right.$
   En effectuant $(1)+(2)$, on trouve $-\lambda(y+2x)(x-y) = 0$ donc $\lambda = 0$ ou $y = -2x$ (car $x - y \neq 0$).
   Si $\lambda = 0$, la première relation donne $1 = 0$, impossible. Donc $y = -2x$. La troisième relation donne alors $5x^2 = 2$ donc $x = \sqrt{\frac{2}{5}}$ ($x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$ est impossible car alors $x - y = 5x < 0$). La première relation donne alors $\lambda = \dfrac{1}{2x(x-y)} = \dfrac{1}{10x^2} = \dfrac{1}{4}$. Il y a donc un seul point critique, $A = \left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}, -2\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)$ avec $\lambda = \dfrac{1}{4}$.
   - On cherche à déterminer sa nature. On a, pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}, \mathcal{L}(x,y) = \ln(x-y) - \frac{1}{4}(x^2+y^2-2)$. Or :
     - $(x,y) \mapsto \ln(x-y)$ est concave, comme composée d'une fonction affine par une fonction concave.
     - $(x,y) \mapsto -\frac{1}{4}(x^2+y^2-2)$ est concave par les propriétés d'extension et d'addition.

     $\mathcal{L}$ est donc concave comme somme de fonctions concaves. $\mathcal{L}$ a donc un maximum global en A, f a donc un maximum global en A sous la contrainte.

6. f et g sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

   - Recherchons les éventuels points critiques de seconde espèce. On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2, \nabla g(x,y) = \left(-\frac{1}{2}x, -\frac{1}{8}y\right)$ et celui-ci ne s'annule qu'en $(0,0)$. Or ce point ne satisfait pas la contrainte, il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce.
   - Recherchons les points critiques de première espèce.
   On pose, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2, \mathcal{L}(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}y^2 - 1\right)$.

Résolvons $\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y) & = 0 \\ g(x,y) & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x\left(2-\frac{\lambda}{2}\right) & = 0 \ (1) \\ y\left(2+\frac{\lambda}{2}\right) & = 0 \ (2) \\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16} & = 1 \ (3) \end{array}\right.$

La première relation impose $x=0$ ou $\lambda=4$, et la seconde impose $y=0$ ou $\lambda=-4$.
Si $x=0$, alors la troisième relation donne $y^2=-16$ ce qui est impossible. Donc $x \neq 0$ et $\lambda=4$, et donc aussi $y=0$. La troisième relation donne $x^2=4$ donc $x=-2$ ou $x=2$.
Il y a donc deux points critiques de première espèce : $A=(-2,0)$ (avec $\lambda=4$) et $B=(2,0)$ (avec $\lambda=4$).

- Déterminons la nature de ces points critiques. Pour $\lambda=4$, on a $\mathcal{L}(x,y)=x^2+y^2-4\left(\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}-1\right)=\frac{5}{4}y^2+4$. $\mathcal{L}$ est donc une fonction convexe (par la propriété d'extension). $\mathcal{L}$ a donc un minimum global en A et B. Sous la contrainte, f possède donc un minimum global en A et B, de valeur 4.

7. f et g sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

- Recherchons les points critiques de seconde espèce. On a, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2, \nabla g(x,y)=(2x+y,x-2y)$ qui ne s'annule qu'en le point $(0,0)$. Mais celui-ci ne satisfait pas la contrainte $g(x,y)=0$, il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce.
- Recherchons les points critiques de première espèce. On pose $\mathcal{L}(x,y)=2x+y-\lambda(x^2+xy-y^2-1)$ le Lagrangien.
Résolvons $\left\{\begin{array}{ll} \nabla\mathcal{L}(x,y) & = (0,0) \\ g(x,y) & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2-2\lambda x-\lambda y & = 0 \ (1) \\ 1+2\lambda y-\lambda x & = 0 \ (2) \\ x^2+xy-y^2 & = 1 \ (3) \end{array}\right.$
En effectuant $(1)-2\times(2)$, on trouve $-5\lambda y=0$ donc $\lambda=0$ ou $y=0$.
Si $\lambda=0$, la première relation donne $2=0$, impossible. Donc $y=0$. La troisième relation donne alors $x^2=1$ donc $x=-1$ ou $x=1$, et la première (ou la deuxième relation) donne $\lambda x=1$. Les points critiques de première espèce sont donc $A=(-1,0)$ avec $\lambda=-1$ et $B=(1,0)$ avec $\lambda=1$.
- On cherche à déterminer leur nature à l'aide des critères du second ordre.
On a, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2}(x,y)=-2\lambda$, $\dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial y}(x,y)=-\lambda$, $\dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial y^2}(x,y)=\lambda$.
En (x,y), on a alors $rt-s^2=-3\lambda^2\leq 0$. On ne peut donc rien conclure sur la nature des points critiques.

8. f et g sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\neq 0, y\neq 0\}$.

- Recherchons les points critiques de seconde espèce.
On a, pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}, \nabla g(x,y)=\left(-\dfrac{2}{x^3},-\dfrac{2}{y^3}\right)$ et celui-ci ne s'annule pas. Il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce.
- Recherchons les points critiques de première espèce. On pose, pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}$,
$\mathcal{L}(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\lambda\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{2}\right)$. On a, pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}, \nabla\mathcal{L}(x,y)=\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2\lambda}{x^3},-\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2\lambda}{y^3}\right)$.
On a $\left\{\begin{array}{ll} \nabla\mathcal{L}(x,y) & = (0,0) \\ g(x,y) & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x & = 2\lambda \\ y & = 2\lambda \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{2} & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & = 2\lambda \\ y & = 2\lambda \\ \lambda^2 & = 1 \end{array}\right.$.
La troisième relation donne $\lambda=-1$ ou $\lambda=1$. Les points critiques de première espèce sont donc $A=(-2,-2)$ avec $\lambda=-1$ et $B=(2,2)$ avec $\lambda=1$.
- Étudions la nature des points critiques à l'aide des conditions du second ordre. Pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}$,
$\dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x^2}(x,y)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{6\lambda}{x^4}$, $\quad\dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x\partial y}(x,y)=0$, $\quad\dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial y^2}(x,y)=\dfrac{2}{y^3}-\dfrac{6\lambda}{y^4}$.
En A, on a donc $r=\dfrac{2}{(-2)^3}-\dfrac{6\times(-1)}{(-2)^4}=\dfrac{1}{8}$, de même $t=\dfrac{1}{8}$. On a alors $rt-s^2=\dfrac{1}{64}>0$ et $r>0$. $\mathcal{L}$ a donc un minimum local en A et f a donc un minimum local en A sous la contrainte, de valeur $f(-2,-2)=-1$.
En B, on a donc $r=\dfrac{2}{2^3}-\dfrac{6\times 1}{2^4}=-\dfrac{1}{8}$, de même $t=-\dfrac{1}{8}$. On a alors $rt-s^2=\dfrac{1}{64}>0$ et $r<0$. $\mathcal{L}$ a donc un maximum local en B et f a donc un maximum local en B sous la contrainte, de valeur $f(2,2)=1$.

9. f et g sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   - Recherchons les points critiques de seconde espèce. On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2, \nabla g(x,y) = (2x-2, 2y+2)$. Celui-ci ne s'annule qu'en $(1,-1)$ qui ne satisfait pas la contrainte. Il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce.
   - Recherchons les points critiques de première espèce. On pose, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{L}(x,y) = x^2 + y^2 + (y-x)^2 - \lambda\left(x^2+y^2+2y-2x-6\right)$.
     On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2, \nabla\mathcal{L}(x,y) = (4x-2y-\lambda(2x-2), 4y-2x-\lambda(2y+2))$.
     $\left\{\begin{array}{ll} \nabla\mathcal{L}(x,y) & = (0,0) \\ g(x,y) & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 4x-2y-\lambda(2x-2) & = 0 \\ 4y-2x-\lambda(2y+2) & = 0 \\ x^2+y^2+2y-2x-6 & = 0 \end{array}\right.$.
     En sommant les deux premières relations, on obtient $(1-\lambda)(x+y) = 0$, ce qui implique $y = -x$ ou $\lambda = 1$.
     Si $y = -x$, la troisième relation donne $2x^2 - 4x - 6 = 0$ soit $x^2 - 2x - 3 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-3) = 16$. Les racines sont alors $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$, et il s'ensuit que $y_1 = 1$ et $y_2 = -3$. Les deux premières relations donnent alors $\lambda = \frac{3}{2}$ dans le premier cas et $\lambda = \frac{9}{2}$ dans le second cas.
     Si $\lambda = 1$, la première relation (ou la deuxième) donne $2x - 2y + 2 = 0$ soit $y = x + 1$.
     La dernière donne alors $x^2 + (x+1)^2 + 2(x+1) - 2x - 6 = 0$ soit $x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 1 - 4 \times (-\frac{3}{2}) = 7$. Les racines sont alors $x_3 = \dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}, x_4 = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}$ et on en déduit $y_3 = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}, y_4 = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$. Il y a donc 4 points critiques de première espèce :
     $A_1 = (-1,1)$ avec $\lambda = \frac{3}{2}$, $A_2 = (3,-3)$ avec $\lambda = \frac{9}{2}$, $A_3 = (x_3, y_3)$ avec $\lambda = 1$, $A_4 = (x_4, y_4)$ avec $\lambda = 1$.
   - Étudions la nature des points critiques.
     Remarquons d'abord que $g(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 8$. L'ensemble des points satisfaisant la contrainte est donc le cercle de centre $(1,-1)$, de rayon $\sqrt{8}$ qui est compact. f étant continue, elle admet un minimum et un maximum global sous la contrainte, qui sont atteints en des points critiques. Or, on calcule
     $f(A_1) = 6, f(A_2) = 54, f(A_3) = 5, f(A_4) = 5$.
     f atteint donc son minimum global en A_3 et A_4 et son maximum global en A_2.
     Pour $\lambda = \frac{3}{2}$, le Lagrangien est $\mathcal{L}(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - 2xy + \frac{1}{2}y^2 - 3x + 3y - 9$. Au voisinage de $(-1,1)$, on a $rt - s^2 = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - (-2)^2 = -3 < 0$. $\mathcal{L}$ a donc un point-col en A_1, on ne peut donc rien dire quant à la nature de A_1 comme point critique de f sous la contrainte.

Exercice 2.61

On considère la fonction f définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f. Cet ensemble est-il convexe ? On admet que $\mathcal{D}$ est un ensemble ouvert.
2. Calculer le gradient de f en chaque point de $\mathcal{D}$.
3. Déterminer l'approximation affine de f au voisinage du point $(1,2)$.
4. On cherche les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{E} = \{(x,y) \in \mathcal{D}, x^2 + y^2 = 2\}$.
   (a) Montrer qu'il n'existe pas de points critiques de seconde espèce.
   (b) Chercher les points critiques de première espèce.
   (c) Déterminer les extrema de f sur $\mathcal{E}$.
5. Déterminer les extrema de f sur $\mathcal{D}$. *On pourra étudier le signe de f sur $\mathcal{D}$.*
6. Déterminer les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{G} = \{(x,y) \in \mathcal{D}, x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Corrigé

1. f est définie sur $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Cet ensemble n'est pas convexe : il contient les points $A = (-1,0)$ et $B = (1,0)$ mais pas leur milieu $\frac{1}{2}(A+B) = (0,0)$.

2. On a, en tout point $(x, y) \in \mathcal{D}, \nabla f(x, y) = \left(\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}\right)$.

3. On en déduit l'approximation affine au voisinage du point $M = (1, 2)$: pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$,
$\widehat{f}_M(x, y) = f(1, 2) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y-2) = \dfrac{4}{5} + \dfrac{32}{25}(x-1) + \dfrac{8}{25}(y-2)$.

4. On pose, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}, g(x, y) = x^2 + y^2 - 2\}$, ainsi $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = 0\}$.

   (a) On a, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}, \nabla g(x, y) = (2x, 2y)$ qui ne s'annule qu'en $(0, 0)$. Or ce point ne satisfait pas la contrainte. Il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce.

   (b) Posons, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$. Résolvons
   $\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y) & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y) & = 0 \\ g(x, y) & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} - 2\lambda x & = 0 \\ \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} - 2\lambda y & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 2 \end{array}\right.$. En remplaçant $x^2 + y^2$ par 2 dans les deux premières relations, celles-ci deviennent respectivement $xy^4 - 4\lambda x = 0$ soit $x(y^4 - 4\lambda) = 0$ et $x^4y - 4\lambda y = 0$ soit $y(x^4 - 4\lambda) = 0$.
   Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, alors $x^4 = 4\lambda = y^4$, donc $x = y$ ou $x = -y$. La relation (3) donne alors $2x^2 = 2$ donc $x = -1$ ou $x = 1$, ce qui implique $y = 1$ ou $y = -1$, et $\lambda = \frac{x^4}{4} = \frac{1}{4}$.
   le cas $x = y = 0$ n'est pas possible car ce point ne satisfait pas la contrainte.
   Si $x = 0$, alors la troisième égalité donne $y^2 = 2$ donc $y = -\sqrt{2}$ ou $y = \sqrt{2}$ puis $\lambda = \frac{x^4}{4} = 0$.
   De même si $y = 0$, alors la troisième égalité donne $x^2 = 2$ donc $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$ puis $\lambda = \frac{y^4}{4} = 0$.
   Il y a donc six points critiques de première espèce : $A = (-1, 1)$ (avec $\lambda = \frac{1}{4}$), $B = (1, -1)$ (avec $\lambda = \frac{1}{4}$), $C = (-\sqrt{2}, 0)$ (avec $\lambda = 0$), $D = (\sqrt{2}, 0)$ (avec $\lambda = 0$), $F = (0, -\sqrt{2})$ (avec $\lambda = 0$), $G = (0, \sqrt{2})$ (avec $\lambda = 0$).

   (c) L'ensemble $\mathcal{E}$ est compact (c'est un cercle, fermé et borné car inclus dans la boule fermée de même centre et même rayon). f étant continue, elle admet un minimum et un maximum globaux sur $\mathcal{D}$.
   Or $f(A) = f(B) = 2$ et $f(C) = f(D) = f(F) = f(G) = 0$, donc f admet un maximum global en A et B et un minimum global en C, D, F et G.

5. On a calculé le gradient de f à la question 2. Celui-ci s'annule en $(x, y) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$, et alors $f(x, y) = 0$. Or on voit que $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$. f admet donc un minimum global sur $\mathcal{D}$, de valeur 0, en tout point (x, y) de $\mathcal{D}$ tel que $x = 0$ ou $y = 0$.

6. On a vu à la question précédente que sur l'ouvert $\overset{\circ}{\mathcal{G}} = \{(x, y) \in \mathcal{D}, x^2 + y^2 < 2\}$, f admet un minimum global en tout point (x, y) tel que $x = 0$ ou $y = 0$, et n'admet pas de maximum (même local). De plus, sur la frontière de $\mathcal{G}$, on a vu que f admet un minimum global en C, D, F, G et un maximum global en A et B. En conclusion, sur $\mathcal{G}$, f admet un minimum global de valeur 0 en tout point $(x, y) \in \mathcal{G}$ tel que $x = 0$ ou $y = 0$ (ce qui inclut C, D, F, G) et un maximum global, de valeur 2, en A et B.

Exercice 2.63

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = -x^2y + \dfrac{1}{2}y^2 + y$.

   (a) Calculer les points critiques de f et donner leur nature locale.

   (b) En étudiant f, préciser si les extrema locaux trouvés à la question précédente sont globaux ou non.

   (c) Rechercher et représenter sur un graphique la courbe de niveau 0 de f.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = x^2 + y^2$. On cherche maintenant à optimiser f sous la contrainte $g(x, y) = 1$.

   (a) Montrer qu'il n'y a pas de point critique de seconde espèce sous la contrainte $g(x, y) = 1$.

   (b) Chercher les 6 points critiques de première espèce sous la contrainte $g(x, y) = 1$. Représenter ces points critiques sur un dessin.

   (c) Donner le maximum et le minimum global de f sous la contrainte $g(x, y) = 1$.

(d) Donner la nature des autres points critiques sous la contrainte $g(x, y) = 1$ (en utilisant si nécessaire des considérations géométriques).

Corrigé

1. (a) On calcule les dérivées partielles de f. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2 + y + 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 1$.
Cherchons les points critiques de f : résolvons $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xy & = 0 \\ -x^2 + y + 1 & = 0 \end{cases}$. La première relation donne $x = 0$ ou $y = 0$. Si $x = 0$, la deuxième relation donne alors $y = -1$. Si $y = 0$, la deuxième relation donne alors $x^2 = 1$ donc $x = 1$ ou $x = -1$. Les points critiques sont donc $(0, -1), (-1, 0)$ et $(1, 0)$.
Déterminons leur nature à l'aide des conditions du second ordre.
   - En $(0, 1)$ on a $r = 2, s = 0, t = 1$ et $rt - s^2 = 2 > 0$. De plus, $r = 2 > 0$. f a donc un minimum local en $(0, -1)$ de valeur -1/2.
   - En $(-1, 0)$ on a $r = 0, s = 2, t = 1$ et $rt - s^2 = -4 < 0$. f a donc un point-col en $(-1, 0)$.
   - En $(1, 0)$, on a $r = 0, s = -2, t = 1$ et $rt - s^2 = -4$. f a donc un point-col en $(1, 0)$.

   (b) On a $f(2, 1) = -5/2 < -1/2$. L'extremum local atteint en $(0, -1)$ n'est donc pas global.

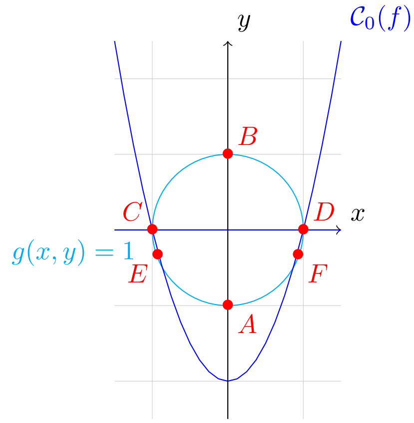
   (c) On a $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y(-x^2 + \frac{1}{2}y + 1) = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \text{ ou } y = 2x^2 - 2)$. La courbe de niveau 0 de f est donc l'union de la droite d'équation $y = 0$ et de la courbe d'équation $y = 2x^2 - 2$.

2. On pose $h(x, y) = g(x, y) - 1$. Le problème revient à optimiser f sous la contrainte $h(x, y) = 0$.

   (a) Le gradient de h est donné par $\nabla h(x, y) = (2x, 2y)$. Il ne s'annule qu'en $(0, 0)$ qui ne satisfait pas la contrainte $h(x, y) = 0$. Il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce sous la contrainte $g(x, y) = 1$.

   (b) On appelle $\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda h(x, y) = -x^2 y + \frac{1}{2}y^2 + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ le Lagrangien associé au problème.
Résolvons le système $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y) & = 0 \\ h(x,y) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xy - 2\lambda x & = 0 \\ -x^2 + y + 1 - 2\lambda y & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 1 \end{cases}$.
La première relation se réécrit $-2x(\lambda + y) = 0$ et donne donc $x = 0$ ou $y = -\lambda$.
   - Si $x = 0$, alors la troisième relation donne $y^2 = 1$ soit $y = 1$ ou $y = -1$. D'après la deuxième relation, on a alors $\lambda = \frac{y+1}{2y}$, soit 0 si $y = -1$ et 1 si $y = 1$.
   - Si $y = -\lambda$, la deuxième relation se réécrit $-x^2 - \lambda + 1 + 2\lambda^2 = 0$ et la troisième $x^2 + \lambda^2 = 1$. En additionnant ces deux relations, on trouve $3\lambda^2 - \lambda + 1 = 1$ soit $\lambda(3\lambda - 1) = 0$. Cela donne $\lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{1}{3}$.
Si $\lambda = 0$, la troisième relation donne $x^2 = 1$ d'où $x = 1$ ou $x = -1$, et l'hypothèse donne $y = -\lambda = 0$.
Si $\lambda = \frac{1}{3}$, la troisième relation donne $x^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$ soit $x^2 = \frac{8}{9}$ et donc $x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ou $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, et l'hypothèse donne $y = -\frac{1}{3}$.

   En conclusion, nous avons les points critiques suivants :
$A = (0, -1)$ avec $\lambda = 0$; $B = (0, 1)$ avec $\lambda = 1$; $C = (-1, 0)$ avec $\lambda = 0$; $D = (1, 0)$ avec $\lambda = 0$;
$E = (-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ avec $\lambda = \frac{1}{3}$; $F = (\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ avec $\lambda = \frac{1}{3}$.



(c) L'ensemble des points satisfaisant la contrainte $g(x,y)=1$ est le cercle de centre $O=(0,0)$ et de rayon 1. Il est fermé et borné, donc compact, et f étant continue, elle admet un minimum et un maximum globaux sur ce cercle. Ceux-ci sont nécessairement atteints en des points critiques.
Or on a $f(A)=-\frac{1}{2}, f(B)=\frac{3}{2}, f(C)=0, f(D)=0, f(E)=-\frac{31}{54}, f(F)=-\frac{31}{54}$.
Le minimum global de f sous la contrainte est donc atteint en E et F, et le maximum global est atteint en B.

(d) Les trois points critiques restants A, C, D ont pour multiplicateur de Lagrange $\lambda=0$, le Lagrangien associé est donc égal à f. On a déjà prouvé que f admettait un minimum local (sans contrainte) en A, c'en est donc aussi un sous la contrainte. En C et D, on a prouvé que f admettait un point-col (sans la contrainte) : on ne peut donc rien conclure quant à la nature de ces points critiques sous la contrainte. Toutefois, on observe sur le dessin que la courbe de niveau 0 n'est pas tangente au cercle en C et D, on en déduit donc que f n'admet pas d'extremum local sous la contrainte en C et D.

Exercice 2.65

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathcal{D}=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ par

$$f(x,y)=\ln(x^2+y^2)-x^2-x, \quad g(x,y)=x^2+y^2$$

1. Montrer que f n'admet aucun extremum global sur $\mathcal{D}$.

2. Déterminer les points critiques de f.

3. Donner la nature des points critiques de f.

On cherche maintenant à optimiser f sous la contrainte $g(x,y)=1$

4. Montrer qu'il n'y a pas de point critique de seconde espèce sous la contrainte $g(x,y)=1$.

5. Chercher les 4 points criiques de première espèce. Représenter ces points critiques sur un dessin.

6. Montrer que f admet un maximum global et un minimum global sous la contrainte $g(x,y)=1$. Préciser les points où ces extrema sont atteints et leurs valeurs.

7. Étudier la nature du point critique restant.

Corrigé

1. On a, pour tout $y>0$, $f(0,y)=\ln(y^2)=2\ln(y)$. Cette quantité tend vers $-\infty$ (respectivement $+\infty$) lorsque y tend vers 0 (respectivement $+\infty$). f n'admet donc pas d'extremum global sur $\mathcal{D}$.

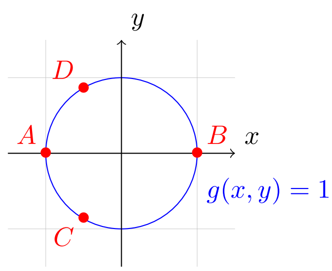
2. On calcule, pour tout $(x,y)\in\mathcal{D}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2x}{x^2+y^2}-2x-1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$.
Si ces deux quantités sont nulles en (x,y), alors la deuxième relation impose $y=0$ et la première se réécrit

$\dfrac{2}{x} - 2x - 1 = 0$ soit $-2x^2 - x + 2 = 0$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) \times 2 = 17$.
Il y a donc deux racines $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$.
Les points critiques sont donc $\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}, 0\right)$ et $\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}, 0\right)$.

3. On calcule, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} - 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}$.
En particulier, en tout point (x,y) de $\mathcal{D}$ où $x \neq 0, y = 0$ (ce qui est le cas des points critiques), on a $r = -\dfrac{2}{x^2} - 2 < 0, s = 0, t = \dfrac{2}{x^2} > 0$ d'où $rt - s^2 < 0$. Les deux points critiques sont donc des points-col pour f.

4. On a, pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}, \nabla g(x,y) = (2x, 2y)$. Celui-ci ne s'annule qu'en $(0,0)$, point qui ne satisfait pas la contrainte $g(x,y) = 1$. Il n'y a donc pas de point critique de seconde espèce.

5. On pose $\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - 1)$ le Lagrangien associé au problème.
Résolvons $\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y) & = 0 \\ g(x,y) & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+y^2} - 2x - 1 - 2\lambda x & = 0 \\ \dfrac{2y}{x^2+y^2} - 2\lambda y & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 1 \end{cases}$.
D'après la troisième relation, on peut remplacer x^2+y^2 par 1 dans les deux premières relations. Il vient $\begin{cases} -1 - 2\lambda x & = 0 \\ 2y - 2\lambda y & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 1 \end{cases}$.
La seconde relation se réécrit $y(1-\lambda) = 0$, donc $y = 0$ ou $\lambda = 1$.
Si $y = 0$, la troisième relation implique $x^2 = 1$ donc $x = -1$ ou $x = 1$, et la première donne enfin $\lambda = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = -\frac{1}{2}$.
Si $\lambda = 1$, la première relation donne $x = -\frac{1}{2}$ et la troisième donne $y^2 = \frac{3}{4}$ soit $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Les points critiques de première espèce sont donc
$A = (-1, 0)$ avec $\lambda = \frac{1}{2}$, $B = (1, 0)$ avec $\lambda = -\frac{1}{2}$, $C = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ avec $\lambda = 1$ et $D = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ avec $\lambda = 1$.



6. L'ensemble des points satisfaisant la contrainte est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 qui est compact. La fonction f étant continue, elle admet un minimum et un maximum globaux sous la contrainte, qui ne peuvent être atteints qu'en des points critiques. Or on a $f(A) = 0, f(B) = -2, f(C) = f(D) = \frac{1}{4}$. f atteint donc son minimum global en B et son maximum global en C et D.

7. Sous la contrainte, on a $f(x,y) = -x^2 - x = -x(1+x)$. Au voisinage de $(-1,0)$, cette quantité est de signe constant et positif. f possède donc un minimum local en A, de valeur 0.