

Développement : Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

Leçons : 161, 204

Théorème. *Le groupe spécial orthogonal $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.*

Démonstration. Soit G sous-groupe distingué de $SO_3(\mathbb{R})$. Notons G^0 la composante connexe de Id dans G .

Étape 1 : G^0 est un sous-groupe distingué de G .

- Soit $x \in G^0$. Par continuité des translations, $x^{-1}G^0$ est connexe, et contient Id : donc $x^{-1}G^0 \subseteq G^0$, ce qui prouve que pour tous $x, y \in G^0$, $x^{-1}y \in G^0$ et G^0 est un sous-groupe de $SO_3(\mathbb{R})$.
- Soit $x \in G^0$. Par continuité des translations, xG^0x^{-1} est connexe, et contient e , donc $xG^0x^{-1} \subseteq G^0$ et G^0 est distingué dans $SO_3(\mathbb{R})$.

Étape 2 : Si G^0 est distinct de $\{Id\}$, alors il contient un retournement.

Rappelons que si $g \in G$ et qu'on note θ l'angle de la rotation (défini au signe près), il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de g est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors $\text{tr}(g) = 2\cos(\theta) + 1$. Soit $\phi \begin{cases} SO_3(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ g & \mapsto \frac{\text{tr}(g) - 1}{2} \end{cases}$. ϕ continue par continuité de la trace.

Par hypothèse, il existe $g \in G^0, g \neq Id$. Quitte à considérer g^{-1} , on peut supposer qu'il existe une mesure de son angle $\theta \in]0, \pi]$. Si $\phi(g) \leq 0$, on pose $s = g$. Sinon, on a $\theta \in]0, \pi/2[$. Soit alors $N = E(\pi/2\theta)$, on a $N\theta \leq \frac{\pi}{2} < (N+1)\theta < 2\frac{\pi}{2} = \pi$. Donc si on pose $s = g^{N+1}$, s rotation d'angle $(N+1)\theta \in [\pi/2, \pi[$. Dans les deux cas on a s telle que $\phi(s) \neq 0$.

On a donc $\phi(Id) = 1$ et $\phi(s) \leq 0$. De plus G^0 est connexe, donc par continuité, $\phi(G^0)$ est un connexe de \mathbb{R} , donc un intervalle, qui contient 0 d'après les considérations précédentes. Soit $r \in G^0$ tel que $\phi(r) = 0$. Ainsi r rotation d'angle $\pi/2$, donc $R = r^2$ est un retournement.

Étape 3 : Si G^0 est distinct de $\{Id\}$, alors $G = SO_3(\mathbb{R})$.

D'après l'étape 2, G^0 contient un retournement R . Si $g \in SO_3(\mathbb{R})$, d'après l'étape 1, $gRg^{-1} \in G^0$, et $\text{tr}(gRg^{-1}) = \text{tr}(R)$ donc gRg^{-1} est aussi un retournement. De plus, notons Δ l'axe de R , soit $u \in \Delta$. Alors $(gRg^{-1})(g(u)) = g(u)$ donc l'axe de gRg^{-1} est $g(\Delta)$. Comme $SO_3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur les droites de \mathbb{R}^3 , tout retournement peut s'écrire gRg^{-1} et donc G^0 contient tous les retournements. Comme toute rotation de \mathbb{R}^3 est le produit de deux retournements, $G^0 = SO_3(\mathbb{R})$, donc $G = SO_3(\mathbb{R})$.

Étape 4 : Si $G^0 = \{Id\}$, alors $G = \{Id\}$.

Dans ce cas, les composantes connexes de G sont des singletons :

Si H composante connexe de G , alors $\varphi \begin{cases} H \times H & \rightarrow G \\ (g, h) & \mapsto gh^{-1} \end{cases}$ est continue, donc son image est connexe, et contient

$\varphi(g, g) = Id$. Donc $\varphi(H \times H) \subseteq G^0 = \{Id\}$ et H est un singleton. Supposons par l'absurde qu'il existe $g \in G, g \neq Id$.

Alors $\psi \begin{cases} SO_3(\mathbb{R}) & \rightarrow G \\ h & \mapsto hgh^{-1} \end{cases}$ est continue, donc d'image connexe dans G , donc constante égale à g . Mais si on

note D l'axe de g , hgh^{-1} rotation d'angle $h(D)$, donc $h(D) = D$ pour tout h , absurde (prendre h rotation d'angle orthogonal à D). Donc $G = \{Id\}$.

Conclusion : les seuls sous-groupes distingués de $SO_3(\mathbb{R})$ sont lui-même et $\{Id\}$, il est donc simple. □

Compléments

Théorème. *Les retournements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$.*

Démonstration. On montre d'abord que les réflexions (par rapport à un hyperplan) engendrent $O(E)$ pour tout espace euclidien E . Soit $u \in O(E)$. Par récurrence sur $r = \text{rg}(u - Id_E)$:

Si $r = 0$, le résultat est vrai.

Si $r \geq 1$ et le résultat est vrai pour $\text{rg}(u - Id_E) < r$: alors il existe $x \in E, u(x) \neq x$. Comme $\|u(x)\| = \|x\|$, on a $(u(x) - x) \perp (u(x) + x)$, donc si on note s la symétrie par rapport à $(u(x) - x)^\perp$, on a $s(u(x) - x) = -(u(x) - x)$ et $s(u(x) + x) = u(x) + x$ donc s échange $u(x)$ et x . Montrons que $\text{rg}(s \circ u - Id_E) < \text{rg}(u - Id_E)$. Soit $y \in \ker(u - Id_E)$. On a $(y, u(x) - x) = (y, u(x)) - (y, x) = (u(y), u(x)) - (y, x) = (y, x) - (y, x) = 0$. Donc $y \in (u(x) - x)^\perp = \ker(s - Id_E)$,

et comme $u(y) = y, y \in \ker(s \circ u - Id_E)$. L'inclusion est stricte car $x \in \ker(u - Id_E)$ mais $s(u(x)) = x$. D'où l'inégalité par le théorème du rang. Par hypothèse de récurrence, $s \circ u$ est un produit de p réflexions, donc comme $s^{-1} = s$, u est un produit de $p + 1$ réflexions avec $p + 1 \leq r$.

Maintenant, si $u \in SO_3(\mathbb{R})$, $\text{rg}(u - Id_E) = 2$ donc $u = s_1 \circ s_2 = (-s_1) \circ (-s_2)$. Or, si s réflexion par rapport à H , $-s$ retournement par rapport à H^\perp . u est donc un produit de deux retournements. \square

Théorème. $SO_2(\mathbb{R})$ et $SO_4(\mathbb{R})$ ne sont pas simples.

Démonstration. Soit $G = SO_2(\mathbb{R})$ ou $SO_4(\mathbb{R})$. Posons $H = \{Id, -Id\}$. H est un sous-groupe de G , distinct de $\{Id\}$ et de G , et distingué dans G , donc G n'est pas simple. \square

Références

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS - ALGÈBRE 3, Cassini, p. 67.

R. Mneimné, F. Testard, INTRODUCTION À LA THÉORIE DES GROUPES DE LIE CLASSIQUES, Hermann.

Notes personnelles

Joli, une autre version dans Caldero-Germoni Tome 1, et une version plus générale dans Gonnord-Tosel.