

## 180. Coniques. Applications.

**Introduction :** Les coniques sont des objets géométriques qui généralisent les droites et cercles, et qui interviennent en physique.

### 1 Coniques affines

On se place dans un plan affine  $(\mathcal{E}, \vec{E})$  muni d'un repère cartésien  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

#### 1.1 Définitions

**Définition 1.** On appelle conique du plan  $\mathcal{E}$  tout ensemble  $\mathcal{C}$  de points  $M(x, y) \in \mathcal{P}$  vérifiant une équation de la forme  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ , avec  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}, (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

**Exemple 2.** L'équation  $xy = 0$  décrit une conique constituée par deux droites sécantes, d'équations  $x = 0$  et  $y = 0$ . L'équation  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  décrit une conique constituée du cercle de centre  $O$  et de rayon 1.

**Définition 3.** La forme quadratique donnée par  $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$  est appelée forme quadratique secondaire de la conique.

Si on pose  $\ell(x, y) = dx + ey$ ,  $\ell$  définit une forme linéaire, et  $\mathcal{C}$  est alors décrite par l'équation  $q(\overrightarrow{OM}) + \ell(\overrightarrow{OM}) + f = 0$ .

#### 1.2 Réduction des coniques affines

**Remarque 4.** Notons  $(s, t)$  la signature de  $q$ . On a  $s + t \leq 2$  et quitte à multiplier l'équation de la conique par  $-1$ , on peut supposer  $s \geq t$ . Les signatures possibles pour  $q$  sont donc  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$  et  $(1, 0)$ .

Si la signature de  $q$  est  $(2, 0)$

On peut écrire  $q = \ell_1^2 + \ell_2^2$  avec  $\ell_1, \ell_2$  formes linéaires indépendantes. En posant  $X = \ell_1(x, y), Y = \ell_2(x, y)$ , l'équation devient  $X^2 + Y^2 + d'X + e'Y + f = 0$ . La conique admet pour centre  $\Omega(-d', -e')$ , et en centrant le repère en  $\Omega$ , la conique admet pour équation  $X'^2 + Y'^2 = f'$ .

- Si  $f' > 0$ , on en divisant par  $f'$  on a  $X'^2 + Y'^2 = 1$ ,  $\mathcal{C}$  est une ellipse.
- Si  $f' = 0$ ,  $\mathcal{C}$  est réduite au point  $\Omega$ .
- Si  $f' < 0$ ,  $\mathcal{C}$  est vide.

Si la signature de  $q$  est  $(1, 1)$

On se ramène comme précédemment à une équation de la forme  $X'^2 - Y'^2 = f'$ .

- Si  $f' \neq 0$ , on se ramène à  $X'^2 - Y'^2 = 1$  et  $\mathcal{C}$  est une hyperbole.
- Si  $f' = 0$ ,  $\mathcal{C}$  est la réunion de deux droites sécantes.

Si la signature de  $q$  est  $(1, 0)$

Il existe une forme linéaire  $\ell_1$  telle que  $q = \ell_1^2$ .

- Si  $\ell_1$  et  $\ell$  sont proportionnelles,  $\mathcal{C}$  admet dans un repère adapté une équation de la forme  $X^2 + \lambda X + f = 0$ .  $\mathcal{C}$  est alors soit vide, soit constituée d'une droite, soit de deux droites parallèles.
- Si  $\ell_1, \ell$  non proportionnelles, en posant  $X = \ell_1(x, y), Y = -\ell(x, y) - f$ ,  $\mathcal{C}$  admet pour équation  $X^2 = Y$ . C'est une parabole.

**Exemple 5.** L'équation  $x^2 + 2xy - y^2 - 4x = 0$  définit une hyperbole de centre  $(1, 1)$ . L'équation  $x^2 - 2xy + y^2 + x - 3y + 3 = 0$  définit une parabole de direction  $y = x$ .

#### 1.3 Point de vue de l'espace engendré

**Lemme 6.** Il existe un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\widehat{E}$  de dimension 3, et  $\varphi \in \widehat{E}^*$  tel que  $\vec{E}$  soit isomorphe à  $\ker(\varphi)$  et  $\mathcal{E}$  à  $\varphi^{-1}(\{1\})$ , et si  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  repère cartésien de  $\mathcal{E}$ , c'est une base de  $\widehat{E}$ .

Ainsi  $M \in \mathcal{C}$  ssi ses coordonnées  $(t, x, y)$  dans  $\widehat{E}$  vérifient  $t = 1$  et  $ax^2 + bxy + cy^2 + dxt + eyt + ft^2 = 0$ .

**Définition 7.** La forme quadratique définie sur  $\mathbb{R}^3$  par  $Q(t, x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dxt + eyt + ft^2$  est appelée forme quadratique principale de  $\mathcal{C}$ .

**Remarque 8.**  $\mathcal{C}$  est alors le cône isotrope de  $Q$ .

**Définition 9.**  $\mathcal{C}$  est dite non dégénérée si  $Q$  est de rang 3.

**Proposition 10.** Si la signature de  $Q$  est  $(2, 1)$ , le cône isotrope  $\widetilde{\mathcal{C}}$  admet pour équation dans un repère adapté  $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ .  $\mathcal{C}$  est l'intersection de  $\widetilde{\mathcal{C}}$  et  $\mathcal{E}$ .

## 2 Coniques dans un plan affine euclidien

$\mathcal{P}$  désigne ici un plan affine euclidien.

#### 2.1 Définition par foyer et directrice

**Définition 11.** Soient  $D$  une droite,  $F$  un point n'appartenant pas à  $D$  et  $e > 0$ . On appelle conique de foyer  $F$ , de directrice  $D$  et d'excentricité  $e$  l'ensemble  $\mathcal{C}$  des points  $M$  du plan vérifiant  $MF = e \cdot d(M, D)$ . La perpendiculaire à  $D$  passant par  $F$  est appelée axe focal de  $\mathcal{C}$ , et notée  $\Delta$ .

**Proposition 12.**  $\Delta$  est un axe de symétrie de  $\mathcal{C}$ .

**Proposition 13.** Dans un repère orthonormal direct  $(F, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  où  $\vec{e}_1$  dirige  $\Delta$ , si on note  $p = e \cdot d(F, D)$ , la conique  $\mathcal{C}$  admet l'équation polaire  $\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$ .

## 2.2 Étude de l'ellipse

**Proposition 14.** Si  $e < 1$ , la conique  $\mathcal{C}$  admet pour équation dans un certain repère orthonormal  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b \in \mathbb{R}^*$ . C'est une ellipse, qui admet les axes du repère comme axes de symétrie et l'origine comme centre de symétrie. Elle admet en particulier un deuxième foyer  $F'$  et une deuxième directrice  $D'$ .

### Tracé

L'ellipse s'obtient en traçant la courbe donnée par  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$  pour  $x \in [-a, a]$ , et en symétrisant par rapport à  $(Ox)$ .

Si  $O, A(a, 0)$  et  $B(0, b)$  sont construits, on sait construire à la règle et au compas  $F$  et  $D$ .  $F$  est à l'intersection de  $\Delta = (OA)$  et du cercle de centre  $B$  et de rayon  $a$ . Et si  $\delta$  droite passant par  $O$ , et si deux parallèles passant respectivement par  $F$  et  $A$  coupent  $\delta$  en  $F_1, A_1$ , si on appelle  $K$  l'intersection de  $\Delta$  et de la parallèle à  $(F_1A)$  passant par  $A_1$ ,  $K$  est l'intersection de  $\Delta$  et  $D$ .

**Proposition 15** (Définition bifocale). L'ellipse de foyers  $F, F'$  et de demi grand-axe  $a$  est l'ensemble  $\{M \in \mathcal{P}, MF + MF' = 2a\}$ .

**Proposition 16.** Une telle ellipse admet la paramétrisation  $\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \sin(t) \end{cases}$ .

## 2.3 Étude de l'hyperbole

**Proposition 17.** Si  $e > 1$ , la conique  $\mathcal{C}$  admet pour équation dans un certain repère orthonormal  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b \in \mathbb{R}^*$ . C'est une hyperbole, qui admet les axes du repère comme axes de symétrie et l'origine comme centre de symétrie. Elle admet en particulier un deuxième foyer  $F'$  et une deuxième directrice  $D'$ .

### Tracé

L'hyperbole s'obtient en traçant la courbe donnée par  $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$  pour  $x \in ]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ , et en symétrisant par rapport à  $(Ox)$ . L'hyperbole admet les droites d'équation  $y = \pm \frac{b}{a}x$  pour asymptotes.

Si  $O, A(a, 0)$  et  $B(0, b)$  sont construits, on sait construire à la règle et au compas  $F$  et  $D$ . On trace la perpendiculaire à  $(Ox)$  passant par  $A$ , on appelle  $C$  son intersection avec l'une des asymptotes. Alors  $F$  est à l'intersection du cercle de centre  $O$ , de rayon  $OC$ , et de l'axe  $(Ox)$ . On construit  $D$  comme dans le cas de l'ellipse.

**Proposition 18** (Définition bifocale). L'hyperbole de foyers  $F, F'$  et de demi grand-axe  $a$  est l'ensemble  $\{M \in \mathcal{P}, |MF - MF'| = 2a\}$ .

**Proposition 19.** Une telle hyperbole admet la paramétrisation  $\begin{cases} x(t) = a \cosh(t) \\ y(t) = b \sinh(t) \end{cases}$ .

## 2.4 Étude de la parabole

**Proposition 20.** Si  $e = 1$ , la conique  $\mathcal{C}$  admet pour équation dans un certain repère orthonormal  $y^2 = 2px$ . C'est une parabole, qui admet l'axe  $Ox$  comme axe de symétrie.

**Proposition 21.** Une telle parabole admet la paramétrisation  $\begin{cases} x(t) = t^2/2p \\ y(t) = t \end{cases}$ .

# 3 Propriétés géométriques des coniques

## 3.1 Tangentes et intersections

**Définition 22.** Soit  $\mathcal{E}$  une ellipse de foyers  $F, F'$ , de demi grand-axe  $a$ . Un point  $M \in \mathcal{P}$  est dit extérieur (respectivement intérieur) à l'ellipse si  $MF + MF' > 2a$  (resp.  $< 2a$ ).

**Théorème 23.** De tout point  $M$  extérieur (resp. intérieur) à  $\mathcal{E}$ , on peut mener exactement deux tangentes (resp. aucune tangente) à  $\mathcal{E}$  passant par  $M$ .

**Théorème 24.** L'ensemble des points où passent deux tangentes à  $\mathcal{E}$  orthogonales est un cercle.

**Définition 25.** On l'appelle cercle orthoptique de l'ellipse.

**Proposition 26.** Si une droite coupe une hyperbole  $\mathcal{H}$  en deux points  $P, Q$  et les asymptotes en  $I, J$ , alors  $[PQ]$  et  $[IJ]$  ont même milieu.

**Corollaire 27.** La tangente en  $M$  à  $\mathcal{H}$  coupe les asymptotes en deux points  $I, J$  tels que  $M$  soit le milieu de  $[IJ]$ .

**Théorème 28.** Une droite est tangente à une hyperbole ssi elle n'est pas parallèle à une asymptote et coupe l'hyperbole en un unique point.

**Définition 29.** Soit  $\mathcal{H}$  une hyperbole de foyers  $F, F'$ , de demi grand-axe  $a$ . Un point  $M \in \mathcal{P}$  est dit extérieur (respectivement intérieur) à l'hyperbole si  $|MF - MF'| > 2a$  (resp.  $< 2a$ ).

**Théorème 30.** Si  $P$  point du plan, le nombre de tangentes à  $\mathcal{H}$  passant par  $P$  est 2 si  $P$  extérieur à  $\mathcal{H}$  et n'appartient pas à une asymptote, 0 si  $P$  est intérieur et 1 sinon.

## 3.2 Triangles inscrits

**Proposition 31.** Le lieu des centres des triangles équilatéraux inscrits dans une parabole est une parabole. De plus, le lieu des centres des cercles circonscrits des triangles construits par le centre et l'intersection de la parabole avec une droite passant par le foyer, est encore une parabole.

**Proposition 32.** Toute ellipse contient un triangle inscrit équilatéral.

**Application 33.** *Il existe une trajectoire fermée à trois rebonds dans un billard elliptique.*

**Théorème 34** (Steiner). Soient  $M_1(r_1), M_2(r_2), M_3(r_3)$  trois points distincts du plan complexe. On note  $P = (X - r_1)(X - r_2)(X - r_3)$  et  $\omega_1, \omega_2$  les racines de  $P'$ . Alors les points  $F_1(\omega_1), F_2(\omega_2)$  sont les foyers d'une ellipse tangente aux trois côtés du triangle  $M_1M_2M_3$  en leurs milieux.

## 3.3 Applications en mécanique et en optique

**Théorème 35.** La tangente en  $M$  à la parabole de foyer  $F$  et de directrice  $D$  coïncide avec la médiatrice de  $[FH]$ , où  $H$  projeté orthogonal de  $M$  sur  $D$ .

**Corollaire 36.** Tout rayon lumineux parallèle à l'axe focal d'une parabole se réfléchit sur celle-ci en passant par son foyer.

**Application 37.** *On peut ainsi réaliser un four solaire en plaçant l'objet à cuire au foyer d'un paraboloïde, ou au contraire un phare en plaçant une source lumineuse au foyer d'un miroir parabolique.*

**Définition 38.** On dit qu'un mobile ponctuel  $M$  suit un mouvement newtonien s'il existe un point  $O$  et  $k > 0$  tel qu'en tout instant son accélération soit donnée par  $\vec{a} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}$  où  $r = \|\vec{OM}\|$  et  $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{OM}\|} \vec{OM}$ .

**Théorème 39.** Sa trajectoire est alors une conique de foyer  $O$ .

**Théorème 40** (Képler). Si la trajectoire d'un mouvement newtonien est bornée, c'est une ellipse de foyer  $O$ . De plus, le segment  $OM$  balaie des aires égales pendant des temps égaux, et la trajectoire est périodique de période  $T$ , dont le carré est proportionnel au cube du grand-axe de l'ellipse.

## Développements

- Cercle orthoptique d'une ellipse.
- Ellipse de Steiner.
- Triangles inscrits dans une parabole.

## Références

- [1] B. Aebischer, GÉOMÉTRIE, Vuibert.
- [2] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, ORAUX X-ENS ALGÈBRE 3, Cassini.
- [3] J. Lelong-Ferrand, J.-M. Arnaudiès, COURS DE MATHÉMATIQUES TOME 3 - GÉOMÉTRIE ET CINÉMATIQUE, Dunod.
- [4] D.-J. Mercier, COURS DE GÉOMÉTRIE, EPU.